Verificare, applicando la definizione, i seguenti limiti:

1 $\boxed{\lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{2}+5\right)=7}$.

Per verificare ciò, dobbiamo provare che in corrispondenza ad un numero $\varepsilon > 0$, arbitrario, è possibile determinare un intorno H del punto 4, per ogni x del quale intorno, escluso eventualmente 4, sia soddisfatta la disequazione:

$$\left|\frac{x}{2}+5-7\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x}{2}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow 2-\varepsilon<\frac{x}{2}<2+\varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4-2\varepsilon < x < 4+2\varepsilon,$ che è un intorno completo del punto 4.

2 $\boxed{\lim_{x\to -1}(x^2+1)=2}$.

Fissato un $\varepsilon > 0$, dobbiamo provare che la disequazione:

$|x^2+1-2|<\varepsilon$ è verificata per tutti i valori della x (escluso al più -1), che formano un intorno completo del punto -1.

Si ha:

$$|x^2+1-2|<\varepsilon \Rightarrow |x^2-1|<\varepsilon \Rightarrow 1-\varepsilon < x^2 < 1+\varepsilon \Rightarrow \sqrt{} \leq |x| \leq \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 < 1+\varepsilon & \Rightarrow -\sqrt{1+\varepsilon} < x < \sqrt{1+\varepsilon} \\ x^2 > 1-\varepsilon & \Rightarrow x < -\sqrt{1-\varepsilon}; \quad x > \sqrt{1-\varepsilon}. \end{cases}$$

Il sistema (fig. 5.1) è verificato per:

$-\sqrt{1+\varepsilon} < x < -\sqrt{1-\varepsilon}$

e

$\sqrt{1-\varepsilon} < x < \sqrt{1+\varepsilon}.$

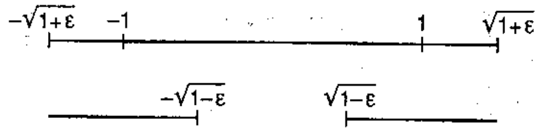

Figura 5.1

Il primo intervallo è un intorno del punto -1 e il limite è verificato.

3 $\boxed{\lim_{x\to 3}\log_3 x = 1}$.

Per verificare ciò, dobbiamo provare che in corrispondenza ad un numero $\varepsilon > 0$, arbitrario, è possibile determinare un intorno del punto 3, per ogni x del quale (escluso 3), sia verificata la disuguaglianza:

$|\log_3 x - 1| < \varepsilon$ cioè: $1-\varepsilon < \log_3 x < 1+\varepsilon$.

Passando dai logaritmi agli esponenziali, l'ultima disequazione si può scrivere:

$$3^{1-\varepsilon} < x < 3^{1+\varepsilon},$$

e questo è effettivamente un intorno di 3, perché:

$3^{1-\varepsilon} < 3$ e $3^{1+\varepsilon} > 3$.

Si osservi che $f(3) = \log_3 3 = 1$.

La rappresentazione grafica di questo limite è data nella fig. 5.2.

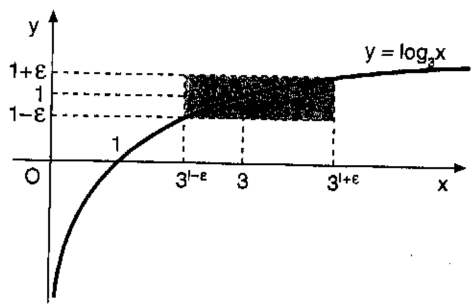

Figura 5.2

6 $\boxed{\lim_{x \to -4} \frac{-2}{(x+4)^2} = -\infty}$.

La funzione è definita per $x \neq -4$.
Occorre far vedere che, fissato un arbitrario numero $M > 0$, esiste, in corrispondenza ad esso, un intorno del punto -4, tale che per ogni x di questo intorno, escluso -4, risulti:

$$\frac{-2}{(x+4)^2} < -M, \quad \text{da cui:} \quad (x+4)^2 < \frac{2}{M},$$

che è soddisfatta per:

$$-\sqrt{\frac{2}{M}} < x+4 < \sqrt{\frac{2}{M}}, \quad \text{e quindi per:} \quad -4-\sqrt{\frac{2}{M}} < x < -4+\sqrt{\frac{2}{M}}.$$

Per ogni x dell'intorno $\left(-4-\sqrt{\frac{2}{M}},\ -4+\sqrt{\frac{2}{M}}\right)$ del punto -4, escluso $x=-4$, i valori della funzione sono inferiori al numero $-M$; ciò prova che il limite della $f(x) = \frac{-2}{(x+4)^2}$, per x tendente a -4, è $-\infty$.

X **7** $\boxed{\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty}$.

Deve essere $x > 0$ e $x \neq 1$.
Basta provare che, fissato un arbitrario $M > 0$, è possibile determinare un intorno sinistro del punto 1, per i punti del quale risulta:

(1) $$\frac{1}{\ln x} < -M.$$ * $\frac{\log x}{-M}$ (>0)

Se $x > 1$, $\ln x > 0$ e la disequazione (1) non è mai verificata.
Se $0 < x < 1$, allora $\ln x < 0$ e risulta:

$$\frac{1}{\ln x} < -M \Rightarrow \ln x > -\frac{1}{M} \Rightarrow x > e^{-\frac{1}{M}}.$$

Pertanto la disequazione (1) è verificata per:

$$e^{-\frac{1}{M}} < x < 1,$$

che è un intorno sinistro del punto 1.

15 $\boxed{\lim_{x \to +\infty} (1-x^2) = -\infty}$.

Prefissato ad arbitrio un numero positivo M, dobbiamo far vedere che esiste un numero N, tale che per ogni $x > N$, risulti:

$$(1-x^2) < -M, \quad \text{cioè:} \quad x^2 > M+1.$$

Questa disequazione è verificata per $x < -\sqrt{M+1}$ e per $x > \sqrt{M+1}$. Pertanto, per ogni $x > \sqrt{M+1}$, la funzione $f(x) = 1-x^2$ assume valori minori di $-M$, il che prova appunto che il suo limite, per x tendente a $+\infty$, è $-\infty$.

16 $\boxed{\lim_{x \to -\infty} (x^3+2) = -\infty}$

Prefissato un numero positivo M, arbitrario, dobbiamo determinare un numero $N > 0$, tale che per ogni $x < -N$, sia:

$$x^3 + 2 < -M, \quad \text{e quindi:} \quad x^3 < -M-2.$$

Questa disequazione è verificata per:

$$x < \sqrt[3]{-M-2}, \quad \text{cioè per:} \quad x < -\sqrt[3]{M+2}.$$

Posto $N = \sqrt[3]{M+2}$, la disequazione è verificata per $x < -N$ e quindi il limite della funzione, per x tendente a $-\infty$, è $-\infty$.

17 *Verificare che non esiste il limite*: $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$.

La funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ è periodica di periodo 2π; essa assume il suo valore minimo -1 per ogni $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ed il suo valore massimo $+1$ per ogni $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Per x tendente a $+\infty$ essa non può divergere né positivamente né negativamente, essendo $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ per ogni valore di x; non può però neppure convergere ad un valore ℓ, poiché in qualsiasi intorno di $+\infty$ essa continua ad oscillare tra -1 e $+1$, assumendo tutti e soli i valori tra questi compresi.

8 $\boxed{\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty}$.

Basta provare che, fissato un arbitrario $M > 0$, esiste un intorno completo, H, dello 0, tale che per ogni $x \in H - \{0\}$, risulti:

(1) $$e^{\frac{1}{x^2}} > M.$$

Dalla (1) si ha (e non è restrittivo supporre $M > 1$):

$$\frac{1}{x^2} > \ln M \Rightarrow x^2 < \frac{1}{\ln M} \Rightarrow -\sqrt{\frac{1}{\ln M}} < x < \sqrt{\frac{1}{\ln M}},$$

e questo è un intorno completo dello 0.

Lo studente, per esercizio, provi che: $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty$.

La rappresentazione grafica di questo limite è data nella fig. 5.3.

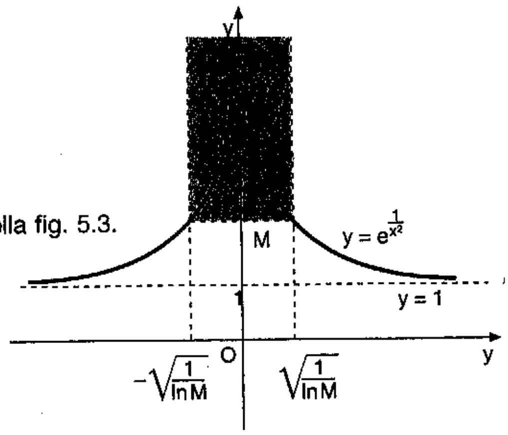

Figura 5.3

9 $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{1-x} = -2}$.

Fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$, bisogna determinare un numero $N > 0$, tale che per ogni $x > N$ risulti:

(1) $$\left|\frac{2x}{1-x} + 2\right| < \varepsilon$$

La disequazione (1) equivale alla seguente:

$$\left|\frac{2}{1-x}\right| < \varepsilon, \quad \text{da cui, per } x \neq 1, \text{ si ha: } \quad |1-x| > \frac{2}{\varepsilon},$$

cioè:

$$1 - x < -\frac{2}{\varepsilon}; \quad 1 - x > \frac{2}{\varepsilon}, \quad \text{da cui:} \quad x > 1 + \frac{2}{\varepsilon}, \quad x < 1 - \frac{2}{\varepsilon}.$$

Posto allora $N = 1 + \frac{2}{\varepsilon}$, la disequazione (1) risulta verificata per ogni $x > N$.

Osservazione

Il lettore provi, per esercizio, che $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{1-x} = -2$.

10 $\boxed{\lim_{x\to -\infty} \sqrt{\frac{1}{1-x}} = 0}$.

Fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$, bisogna determinare un numero $N > 0$, tale che per ogni $x < -N$, risulti, per $x < 1$:

(1) $$\sqrt{\frac{1}{1-x}} < \varepsilon.$$

La (1) equivale, successivamente, a:

$$\frac{1}{1-x} < \varepsilon^2 \Rightarrow 1 - x > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow x < 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Posto allora: $N = \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$, la disequazione (1) risulta verificata per $x < -N$.

11 $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{3x-1}{x+2} = 3}$.

La funzione $\frac{3x-1}{x+2}$ è definita per $x \neq -2$.

Per verificare che, per x tendente a $+\infty$, essa tende a 3, fissiamo un numero arbitrario $\varepsilon > 0$, e facciamo vedere che è possibile determinare, in corrispondenza ad esso, un numero $N > 0$ tale che per ogni $x > N$, risulti:

$$\left|\frac{3x-1}{x+2} - 3\right| < \varepsilon, \quad \text{cioè:} \quad 3 - \varepsilon < \frac{3x-1}{x+2} < 3 + \varepsilon.$$