Simone Secchi

Introduzione a un metodo perturbativo nella teoria dei punti critici

Appunti dei seminari

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo
Hong Kong Barcelona
Budapest

Indice

Notazioni

Raccogliamo di seguito un elenco delle notazioni più utilizzate in queste dispense. Abbiamo cercato di attenerci il più possibile alla simbologia usata correntemente nella letteratura.

1. Le derivate verranno indicate generalmente con l'operatore D. Ad esempio, il differenziale (secondo Fréchet) di un funzionale $f\colon X \to \mathbb{R}$ nel punto $u \in X$ è denotato con $Df(u)$. Fa eccezione, per ovvi motivi di tradizione, la derivata di una funzione reale di variabile reale, le cui derivate sono indicate per mezzo di apici ($'$). Il simbolo ∇ sarà di regola riservato al gradiente di una funzione a valori reali, definita su uno spazio di Hilbert.
2. Gli integrali sono sempre calcolati rispetto all'ordinaria misura di Lebesgue. Per questo motivo a volte scriveremo brevemente $\int u$ invece del più esplicito $\int u \, \mathrm{d}x$. Se il dominio di integrazione non appare esplicitamente, sarà sottinteso che esso coincide con tutto lo spazio in cui stiamo lavorando.
3. La notazione $\langle x \mid y \rangle$ indica il prodotto scalare (o interno) dei due elementi x e y di uno spazio di Hilbert. Solo nel caso degli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$ abbiamo talvolta indicato il prodotto scalare ordinario con un semplice $x \cdot y$.
4. La notazione $X \simeq Y$ indica di norma la presenza di un diffeomorfismo tra le strutture di X e di Y.

1. Introduzione

Consideriamo il problema seguente: trovare una soluzione positiva $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale

$$-u'' + \lambda u = |u|^{p-1} u, \tag{1}$$

dove $\lambda > 0$ è un parametro assegnato e $p \in (1, +\infty)$.

Quindi l'equazione (1) è un'equazione non lineare. Usando metodi elementari, oppure per verifica *a posteriori*, possiamo convincerci che l'unica soluzione non nulla di (1) soggetta alla limitazione di tipo *omoclino*

$$\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0 \tag{2}$$

è data esplicitamente dalla formula

$$u(x) = \left(\frac{\lambda p}{2 \cosh^2 \left(\frac{p-2}{2} \sqrt{\lambda}\ x \right)} \right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

In ogni caso, l'equazione (1) è autonoma, nel senso che se u_0 è una soluzione, allora anche $u_0(\cdot - \tau)$ lo è, per ogni $\tau \in \mathbb{R}$. Con parole più altisonanti, il gruppo $\mathbb{R}$ agisce sull'insieme delle soluzioni. Sottolineiamo che tale gruppo non è compatto.

Se la determinazione delle soluzioni omocline di (1) era facile, lo sarà meno quella di un'equazione "leggermente" diversa, della forma

$$\begin{cases} -u'' + \lambda u = |u|^{p-1} u + \varepsilon W'(u) \\ \lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

dove $W : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione che soddisfa $W(0) = W'(0) = 0$, e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ è un parametro "piccolo".

Poiché risulta poco pratico cercare di risolvere a mano (3) se nonaddirittura impossibile, conviene cercare di sfruttare il fatto che ilparametro $\varepsilon \in \mathbb{R}$ invita a considerare (3) come un'approssimazione di (1). Più concretamente, ci chiediamo se sia possibile sfruttare la soluzione di (1) per costruire nuove soluzioni di (3).

Consideriamo anche il seguente esempio. È dato il sistema hamiltoniano del secondo ordine

$$\ddot{x} + V_x(t,x) = 0 \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} \tag{4}$$

Il simbolo V_x denota qui la derivata di V rispetto alla variabile x. Supponiamo che V sia periodica nella prima variabile, con periodo $T > 0$. Precisamente,

$$V(t+T,x) = V(t,x)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Cerchiamo soluzioni T–periodiche di (4). A questo scopo, introduciamo lo spazio di Hilbert reale

$$E = H^1_T(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in H^1(0,T;\mathbb{R}^n) \mid u(0) = u(T) \right\}$$

dotato della norma

$$\|u\|^2 = \int_0^T |\dot{u}|^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^T |u|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Consideriamo il funzionale $f \colon E \to \mathbb{R}$ definito da

$$f(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{u}|^2 \,\mathrm{d}t - \int_0^T V(t,x) \,\mathrm{d}t.$$

Un calcolo esplicito mostra subito che

$$Df(u)(v) = \int_0^T \dot{u}\dot{v} \,\mathrm{d}t - \int_0^T V_x(u) v \,\mathrm{d}t$$

per ogni u, $v \in E$. In particolare, i punti critici di f in E corrispondono alle soluzioni T–periodiche di (4). Supponiamo adesso che V possieda una singolarità, che per fissare le idee supporremo essere nell'origine. Un esempio è il potenziale

$$\begin{aligned} V \colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\mapsto -\frac{1}{|x|^\alpha}. \end{aligned}$$

Chiaramente, il funzionale f risulta ora definito solo sull'insieme

$$\Lambda = \{ u \in E \mid u(t) \neq 0 \quad \text{per ogni } t \in [0,T] \}.$$

Dato che Λ è evidentemente un insieme aperto, si presenta un evidente fenomeno di *perdita di compattezza*. Essenzialmente, ciò che può capitare è che una successione $\{u_n\}$ in Λ tale che $\{f(u_n)\}$ sia limitata converga debolmente verso qualche $u \in \partial\Lambda$.

Lemma 1.1 *Supponiamo che*

$$V(t,x) \leq -\frac{c}{|x|^2}$$

per $0 < |x| \ll 1$*. Se* $u_n \rightharpoonup u \in \partial\Lambda$*, allora*

$$\lim_n \int_0^T V(t, u_n)\,\mathrm{d}t = -\infty.$$

Proof. Per le immersioni di Sobolev, $u_n \to u$ uniformemente. Essendo $u \in \partial \Lambda$, esiste t^* tale che $u(t^*) = 0$. Allora per n grande e t appartenente ad un opportuno intorno di t^*, abbiamo

$$\begin{aligned}\log|u_n|\Big|_{t^*}^{t^*+\varepsilon} &= \int_{t^*}^{t^*+\varepsilon} \frac{\dot u_n}{|u_n|}\,\mathrm{d}t \le \left[\int_0^T |\dot u_n|^2\right]^{1/2} \left[\int_{t^*}^{t^*+\varepsilon} |u_n|^{-2}\right]^{1/2} \\ &\le c_1 \left[\int_{t^*}^{t^*+\varepsilon} |u_n|^{-2}\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Siccome $u_n(t^*) \to u(t^*) = 0$ e $u_n(t^*+\varepsilon) \to u(t^*+\varepsilon) \neq 0$ per $n \to \infty$, otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t^*}^{t^*+\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{|u_n|^2} = +\infty.$$

□

Consideriamo ora il potenziale

$$V(x) = -\frac{1}{|x|^\alpha}$$

con $\alpha \in (0,2)$. Chiaramente esso non soddisfa le ipotesi del lemma precedente. Per $\alpha = 1$, ritroviamo il ben noto potenziale di Keplero, associato all'equazione

$$\ddot x + \frac{x}{|x|^3} = 0.$$

È cosa ben nota che il problema di Keplero è planare, sicché possiamo riscriverlo in coordinate polari (r, ϕ). Se $J = r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ indica il momento angolare, quantità naturalmente conservata durante il moto, allora $r = r(t)$ verifica l'equazione

$$\ddot r + \frac{1}{r^2} - \frac{J^2}{r^3} = 0.$$

Per valori energetici negativi, sfruttando la forma del potenziale efficace

$$V_{\mathrm{eff}} = \frac{J}{2r^2} - \frac{1}{r},$$

si dimostra che esistono soluzioni periodiche. È una domanda abbastanza naturale se l'esistenza di soluzionei periodiche si conservi sotto piccole perturbazioni, ad esempio della forma

$$\ddot x + \frac{x}{|x|^3} = \varepsilon W_x(t, x)$$

con W regolare e T–periodica.

Da ultimo, consideriamo il celeberrimo **problema di Yamabe**. Sia S una superficie di $\mathbb{R}^3$. Per ogni punto $p \in S$ scegliamo un vettore unitario $N \perp S$ e un vettore $v \in T_pS$ i quali generino il piano normale P_v Consideriamo la curva $\alpha = P_v \cap S$.[1] Essa è localmente liscia e dunque possiamo parlare della sua curvatura $K(v,p)$. Ricordiamo che dalla Geometria Differenziale elementare si sa che se

$$\alpha \colon s \mapsto \alpha(s)$$

è la parametrizzazione mediante la lunghezza d'arco di α, allora $K(s) = |\alpha''(s)|$.

Definition 1.2 Le curvature principali di S in p sono definite da

$$K_1 = \max_{v \in T_pS} K(v,p)$$
$$K_2 = \min_{v \in T_pS} K(v,p).$$

La curvatura scalare di S in p è definita come

$$R = K_1 K_2.$$

La curvatura media di S in p è definita invece come

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2}.$$

Il seguente risultato, dovuto a Gauß, è spesso ritenuto il teorema più importante della Geometria Differenziale.

Theorem (Teorema Egregium) *La curvatura scalare è invariante sotto l'azione delle isometrie locali.*

Consideriamo adesso una varietà riemanniana (M,g). Nel seguito denoteremo con $g = [g_{ij}]$ la metrica riemanniana di M.

Definition 1.3 Una metrica g' è conforme a g, e scriveremo $g' \sim g$, se

$$g' = \mathrm{e}^u g,$$

dove u è una funzione liscia definita su M.

Siamo interessati ai due problemi seguenti:

[1] Chiamata anche *sezione normale* in p.

- **Problema di Yamabe:** esiste una metrica g' copnforme a g tale che la curvatura scalare di M nella metrica g', detta $R_{g'}$, sia costante?
- **Problema della curvatura scalare:** esiste una metrica g' conforme a g tale che la curvatura scalare $R_{g'}$ sia ovunque uguale a una funzione assegnata $R\colon M \to \mathbb{R}$?

Riscriviamo le richieste dei due problemi sotto la forma di equazioni differenziali. Sia $n = \dim M \geq 3$. Cerchiamo il fattore di conformalità tra g' e g del tipo $u^{\frac{4}{n-2}}$, cioè

$$g' = u^{4/(n-2)} g,$$

dove ovviamente $u > 0$. Finalmente il problema della curvatura scalare sulla varietà M si esprime per mezzo della seguente equazione differenziale ellittica:

$$-4\frac{n-1}{n-2}\Delta_g u + R_g u = R_{g'} u^{\frac{n+2}{n-2}}, \tag{5}$$

dove Δ_g è l'operatore di Laplace–Beltrami su M, esplicitamente

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|g|}\, g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

dove

$$|g| = \det[g_{ij}], \qquad [g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}.$$

Innanzitutto, notiamo subito il cosiddetto *esponente critico* $\frac{n+2}{n-2}$ in (5). Come noto, questo nome è legato alla mancanze di compattezza nell'immersione

$$H^1(\mathbb{R}^n) \to L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n).$$

Focalizziamo la nostra attenzione sul caso $M = S^n$, la sfera n–dimensionale immersa in $\mathbb{R}^{n+1}$. In tal caso abbiamo a disposizione uno strumento importante, la proiezione stereografica di S^n su $\mathbb{R}^n$. A meno di fattori moltiplicativi costanti, l'equazione (5) si riscrive

$$-\Delta u = R_{g'} u^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Quali sono le peculiarità di questo problema? Essenzialmente abbiamo due proprietà:
- l'equazione è invariante per traslazioni;
- vista la presenza dell'esponente critico, l'equazione è invariante anche rispetto alle dilatazioni, cioè se z è una soluzione, necessariamente anche la funzione
$$x \mapsto \mu^\alpha z\left(\frac{x-\xi}{\mu}\right)$$
è una soluzione, per ogni valore $\mu > 0$ e qualche opportuna costante $\alpha > 0$.

Similmente il problema di Yamabe si formula come

$$-\Delta_g u + R_g u = u^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Di seguito, ripercorriamo molto brevemente la storia di questi problemi.

IL PROBLEMA DI YAMABE

- Il primo risultato è dovuto a H. Poincaré per $n = 2$.
- Negli anni '60 Yamabe ha affrontato il problema cercando punti critici vincolati del funzionale

  $$\phi(u) = \int |\nabla u|^2 + R_g |u|^2$$

  con il vincolo $\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} = 1$ in $H^1(M)$. I punti critici positivi sono soluzioni del problema geometrico. Purtroppo Yamabe non si era accorto della perdita di compattezza dovuta all'esponente critico, e questo metodo risulta dunque inefficace.
- T. Aubin, nel caso $n \geq 6$ e sotto l'ipotesi aggiuntiva che g non sia localmente conformemente piatta, ha dimostrato che esistono soluzioni del problema di Yamabe. Il metodo dimostrativo è essenzialmente quello introdotto da Brezis e Nirenberg nel 1983.
- R. Schoen ha dimostrato che se (M, g) è di classe C^∞, e se (M, g) non è localmente conformemente equivalente a S^n, allora le soluzioni del problema di Yamabe sono limitate in norma C^2.

IL PROBLEMA DELLA CURVATURA SCALARE

- Il primo risultato è dovuto a J. Moser per $n = 2$. In questo caso particolare, il fattore di conformalità è

  $$g' = \mathrm{e}^{2u} g$$

  e l'equazione diventa

  $$-\Delta_g u + R_g u = R(x)\mathrm{e}^{2u}.$$

  Moser ha dimostrato che se la varietà M è simmetrica e $R(x) = R(-x)$, allora esiste una soluzione.
- Kazdan e Warner hanno dimostrato risultati di non esistenza, legati a specifiche caratteristiche di R.
- Y. Y. Li ha studiato il caso $n \geq 3$. Considerando $R_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon K(x)$, cioè piccole perturbazioni della curvatura costante, ha trovato soluzioni mediante omotopie rispetto a $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1]$. Usando poi un teorema di compattezza di Schoen, ha potuto passare a $\varepsilon = 1$.

Nel prossimo paragrafo inizieremo lo studio più dettagliato del metodo perturbativo nel caso non compatto. Fermo restando il fatto che la teoria proposta conterrà come caso particolare anche il caso compatto, invitiamo il lettore interessato a leggere gli ultimo capitoli di [MW], dove troverà una panoramica del metodo in un quadro molto chiaro.

2. L'impostazione astratta del metodo

Consideriamo uno spazio di Hilbert reale E, il cui prodotto interno sarà denotato con $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ e la norma naturale con $\| \cdot \|$. Consideriamo una famiglia $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon \geq 0}$ difunzionali che soddisfano l'ipotesi di struttura:

(h0) $f_\varepsilon \in C^2(E, \mathbb{R})$ e ha la forma

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - F(u) + \varepsilon G(u).$$

Motivati dagli esempi visti sopra, supponiamo che il funzionale

$$f_0(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - F(u)$$

corrispondente a $\varepsilon = 0$, cioè all'assenza di perturbazione, abbia una varietà *non degenere* Z dipunti critici. Più rigorosamente:

(h1) $f_0 \in C^2(E, \mathbb{R})$ ha una varietà Z di dimensione $d < \infty$ di punti critici;
(h2) per ogni $z \in Z$ l'operatore lineare[2] $D^2F(z)$ è compatto;
(h3) per ogni $z \in Z$ risulta: $T_zZ = \ker D^2 f_0(z)$.

Remark. Siccome $T_zZ \subset \ker D^2 f_0(z)$ per ogni $z \in Z$, la condizione (h3) appare come una richiesta di *non degeneratezza* di Z.

Come forse sarà chiaro, questo schema astratto riproduce quello concreto in cui i punti critici di f_0 sono le soluzioni (note) del problema corrispondente al parametro $\varepsilon = 0$, mentre il nostro obiettivo è quello di risolvere ilproblema difficile f_ε, che consiste nel trovare i punti critici dif_ε.

In questa prima fase, non è restrittivo introdurre qualche ulteriore ipotesi di struttura, per semplificare le notazioni e i calcoli. Supporremo pertanto che $Z = \zeta(\mathbb{R}^d)$ con $\zeta \in C^2(\mathbb{R}^d, E)$. Sia $B_R = \{\theta \in \mathbb{R}^d : |\theta| < R\}$ e $Z^R = \zeta(B_R)$.

Lemma 2.1 *Per ogni $R > 0$, esistono $\varepsilon_0 > 0$ e una funzione regolare*

[2] Leggero abuso di notazione. Poiché H è uno spazio di Hilbert, è lecito identificare la forma bilineare (continua) $D^2F(z)\colon H \times H \to \mathbb{R}$ con un operatore lineare continuo indicato ancora con lo stesso simbolo. Ci atterremo sempre a questa convenzione.

$$w : Z^R \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to E$$

tali che

i. $w(z,0) = 0$ *per ogni* $z \in Z$;
ii. $Df_\varepsilon(z + w(z,\varepsilon)) \in T_z Z$ *per ogni* $z \in Z$;
iii. $w(z,\varepsilon)$ *è ortogonale a* $T_z Z$ *per ogni* $(z,\varepsilon) \in Z^R \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

Proof. Sia $\{q_i\}$ per $i = 1, 2, \ldots, d$ una base ortogonale di $T_z Z$. Troveremo la mappa w mediante il Teorema della Funzione Inversa. Detto $M = Z^R \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, introduciamo la mappa

$$H : M \times E \times \mathbb{R}^d \to E \times \mathbb{R}^d$$

con componenti $H_1 \in E$ e $H_2 \in \mathbb{R}^d$ date da

$$H_1(z, \varepsilon, w, \alpha) = z + w - DF(z+w) + \varepsilon DG(z+w) - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i q_i$$

$$H_2(z, \varepsilon, w, \alpha) = \begin{pmatrix} \langle w \mid q_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle w \mid q_d \rangle \end{pmatrix}.$$

Chiaramente, $H_1(z, 0, 0, 0,) = z - DF(z) = 0$ e $H_2(z, 0, 0, 0,) = 0$. Inoltre, fissato $\bar{z} \in Z$, le derivate di H calcolate in $(\bar{z}, 0, 0, 0)$ sono

$$\frac{\partial H_1}{\partial(\alpha, w)}(v, \beta) = v - D^2F(\bar{z})v - \sum_{i=1}^{d} \beta_i q_i$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial(\alpha, w)}(v, \beta) = \begin{pmatrix} \langle v \mid q_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v \mid q_d \rangle \end{pmatrix}.$$

Poiché l'ipotesi (h2) implica che l'operatore

$$L(\bar{z}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial(\alpha,w)} \\ \frac{\partial H_2}{\partial(\alpha,w)} \end{pmatrix}$$

è una pertubazione compatta dell'identità, per dimostrare che $L(\bar{z})$ è invertibile ci basta dimostrarne l'iniettività. Dunque, supponiamo che $L(\bar{z})(\beta, v) = (0, 0)$. Da

$$v - D^2F(\bar{z})v = \sum_{i=1}^{d} \beta_i q_i \tag{6}$$

segue che

$$-\langle D^2F(\bar{z})v \mid q_i \rangle = \beta_i \|q_i\|^2.$$

Usando (h3) troviamo $q_i \in \ker D^2 f_0(\bar z)$, sicché

$$\langle D^2 F(\bar z)v \mid q_i \rangle = \langle D^2 F(\bar z) q_i \mid v \rangle = \langle v \mid q_i \rangle = 0.$$

Di conseguenza $\beta_i = 0$ e (6) diventa

$$v - D^2 F(\bar z)v = 0.$$

Usando ancora (h3), deduciamo che $v \in T_{\bar z}Z$. D'altra parte, $\frac{\partial H_1}{\partial(\beta,v)} = 0$ implica che v è ortogonale a $T_{\bar z}Z$ e perciò $v = 0$. Un'applicazione del Teorema della Funzione Inversa fornisce ora la funzione w cercata. □

Remark. Dalla construzione di w, segue subito che $w = O(\varepsilon)$, o più precisamente che $w = \varepsilon w_0 + o(\varepsilon)$ per qualche w_0 opportuno.

Remark. Come già accennato, l'idea delle varietà non degeneri di punti critici è piuttosto "antica". Nelle trattazioni che abbiamo consultato, sembra però che la caratteristica principale sia un'ipotesi di *compattezza* della varietà Z. Chiaramente, un'ipotesi del genere rende inutile il tentativo di sfuttare questo metodo per trattare equazioni senza compattezza. Per una breve esposizione del metodo classico riguardante queste problematiche, rinviamo a [MW].

Definiamo ora la varietà *perturbata*

$$Z_\varepsilon = \{ z + w(z,\varepsilon) \mid (z,\varepsilon) \in M \},$$

dove w è la funzione costruita nel Lemma 2.1.

Lemma 2.2 *Z_ε è un vincolo naturale per f_ε. Con questo intendiamo che i punti critici di f_ε sono tutti e soli i punti critici di f_ε ristretti a Z_ε.*

Proof. Per ipotesi, risulta

$$Df_\varepsilon(z + w(z,\varepsilon)) \perp T_{z+w(z,\varepsilon)} Z_\varepsilon$$

cioè

$$\langle Df_\varepsilon(z + w(z,\varepsilon)) \mid q + \dot w(z,\varepsilon) \rangle = 0$$

dove $\dot w$ indica la derivata rispetto a z. Ma allora

$$Df_\varepsilon(z + w(z,\varepsilon)) = \alpha_\varepsilon q$$

per qualche $\alpha_\varepsilon \in \mathbb{R}$, sicché

$$0 = \langle \alpha_\varepsilon q \mid q + \dot w \rangle = \alpha_\varepsilon |q|^2 + \alpha_\varepsilon \langle q \mid \dot w \rangle.$$

Per ipotesi abbiamo $\langle w \mid q \rangle = 0$ e, derivando, $\langle \dot w \mid q \rangle + \langle w \mid \dot q \rangle = 0$. Siccome $w \to 0$ per $\varepsilon \to 0$, otteniamo facilmente

$$0 = \alpha_\varepsilon + \alpha_\varepsilon o(1)$$

che implica $\alpha_\varepsilon = 0$ e finalmente $Df_\varepsilon(z + w(z,\varepsilon)) = 0$. □

Abbiamo così ottenuto un'informazione molto utile: per trovare i punti critici di f_ε, che in generale sarà un funzionale definito su uno spazio di dimensione infinita, è in realtà sufficiente trovare i punti critici del funzionale $f_{\varepsilon|Z_\varepsilon}$, il quale è invece definito su uno spazio di dimensione finita d.

Remark. Se Z è già compatto, come in alcuni esempi e nella teoria classica, un'applicazione diretta dei metodi di tipo Lusternik e Schnirel'man implica l'esistenza di $\mathrm{cat}(Z)$ punti critici per f_ε. Se invece Z non è compatto, abbiamo bisogno di procedere oltre nell'analisi del problema "finito–dimensionale" associato.

Lemma 2.3 *Per $z \in Z^R$, risulta*

$$\Phi_\varepsilon(z) = f_\varepsilon(z + w(z,\varepsilon)) = b + \varepsilon G(z) + o(\varepsilon)$$

per $\varepsilon \to 0$, dove $b = f_0$ su Z

Proof. Scriviamo l'espansione di Taylor di Φ_ε, ricordando che $w = O(\varepsilon)$ per $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(z) &= f_\varepsilon(z + w(z,\varepsilon)) = f_0(z + w(z,\varepsilon)) + \varepsilon G(z + w(z,\varepsilon))\\ &= b + \langle Df_0(z) \mid w(z,\varepsilon)\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 f_0(z) w(z,\varepsilon) \mid w(z,\varepsilon)\rangle\\ &+ \varepsilon\left[G(z) + \langle DG(z) \mid w(z,\varepsilon)\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 G(z) w(z,\varepsilon) \mid w(z,\varepsilon)\rangle\right] + o(\varepsilon)\\ &= b + \varepsilon G(z) + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

□

Theorem 2.4 *Se G possiede un massimo o un minimo locale stretto in qualche punto z_0, allora f_ε ha un punto critico u_ε tale che $u_\varepsilon \to z_0$ per $\varepsilon \to 0$.*

Proof. Infatti, supponiamo che $z_0 \in \mathbb{R}^n$ sia tale che

$$G(z_0) < \inf_{z \in \partial U} G(z)$$

per qualche intorno U contenente z_0. Usando il lemma precedente, è facile dimostrare che, se ε è sufficientemente piccolo, allora esiste un intorno U_ε di z in Z^R tale che

$$\inf_{U_\varepsilon} \Phi_\varepsilon < \inf_{\partial U_\varepsilon} \Phi_\varepsilon.$$

Siccome Z^R è una struttura di dimensione finita, questo implica immediatamente che Φ_ε possiede in U_ε un punto di minimo relativo. Questo punto sarà dunque critico per Φ_ε. Invocando il Lemma 2.2, deduciamo infine che f_ε possiede un punto critico. Analogamente si procede se G possiede un massimo relativo in z_0. $\square$

Più generalmente, vale un teorema di esistenza per i cosiddetti punti critici essenziali, come definiti di seguito.

Definition 2.5 Dato $c \in \mathbb{R}$, definiamo

$$A^c = \{z \in Z \mid G(z) < c\}$$

e diciamo che $z_0 \in Z$ è un punto critico essenziale di $G_{|Z}$ se, posto $c_0 = G(z_0)$, l'insieme $A^{c_0+\delta}$ non è deformabile in $A^{c_0-\delta}$, per nessun $\delta > 0$. Il livello c_0 sarà detto *livello critico essenziale*.

Theorem 2.6 *Supponiamo che $c_0 = G(z_0)$ sia un livello critico essenziale di G, e che G sia coercitivo su Z. Allora f_ε ha un livello critico vicino a c_0.*

Proof. Prendiamo $c > c_0$. Poiché G è coercitivo, esiste $R > 0$ tale che $A^c \subset Z^R$. Chiamato Ψ_ε il diffeomorfismo

$$\Psi_\varepsilon : z \mapsto z + w(z, \varepsilon)$$

poniamo $A^c_\varepsilon = \Psi_\varepsilon(A^c)$ e

$$f^a_\varepsilon = \{u \in A^c_\varepsilon \mid f_\varepsilon(u) \leq a\}.$$

La dimostrazione segue allora dal seguente risultato e da un'applicazione elementare della teoria dei punti critici. $\square$

Lemma 2.7 *Per ε piccolo risulta*

$$f_\varepsilon^{b+\varepsilon(c_0-2\delta)} \subset A_\varepsilon^{c_0-\delta} \subset A_\varepsilon^{c_0+\delta} \subset f_\varepsilon^{b+\varepsilon(c_0+2\delta)}.$$

Proof. Ci limitiamo all'ultima inclusione. Sia $u = z + w(z, \varepsilon) \in A^{c+\delta}_\varepsilon$, cioè $G(z) < c + \delta$. Allora per ε piccolo troviamo subito

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(u) &= b + \varepsilon G(z) + o(\varepsilon) \\ &< b + \varepsilon(c_0 + \delta) + o(\varepsilon) \\ &< b_\varepsilon(c_0 + 2\delta). \end{aligned}$$

$\square$

Theorem 2.8 *Supponiamo che esistano $c \in \mathbb{R}$ e $\Sigma \subset Z$ tali che*
a. *A^c è limitato*
b. *$\Sigma \subset A^c$ e $\sup_\Sigma G < c$.*
Allora f_ε possiede almeno $\mathrm{cat}_{A^c}(\Sigma)$ punti critici.

Proof. Sia $\Sigma_\varepsilon = \Psi_\varepsilon(\Sigma)$. I risultati precedenti implicano che per ε piccolo

$$\sup_{\Sigma_\varepsilon} f_\varepsilon < \inf_{\partial A_\varepsilon^c} f_\varepsilon.$$

Scegliamo β tale che $\sup_{\Sigma_\varepsilon} f_\varepsilon < \beta < \inf_{\partial A_\varepsilon^c} f_\varepsilon$. Allora

$$\Sigma_\varepsilon \subset f_\varepsilon^\beta \subset A_\varepsilon^c$$

e dunque la cardinalità dell'insieme dei punti critici di f_ε sarà maggiore o uguale a

$$\mathrm{cat}_{f_\varepsilon^\beta}(f_\varepsilon^\beta) \geq \mathrm{cat}_{f_\varepsilon^\beta}(\Sigma_\varepsilon) \geq \mathrm{cat}_{A_\varepsilon^c}(\Sigma_\varepsilon) = \mathrm{cat}_{A^c}(\Sigma).$$

□

Remark. Osserviamo esplicitamente che non abbiamo mai fatto uso di condizioni di compattezza quali quella di Palais–Smale o simili. Come vedremo, sarà il problema non perturbato a portare con sé la mancanza di compattezza, spesso a causa di simmetrie.

Remark. Come noto, uno dei metodi più applicati nella teoria dei punti critici è il teorema del "mountain pass" di Ambrosetti e Rabinowitz. In quel contesto, i punti critici trovati possiedono una ben precisa caratterizzazione dal punto di vista geometrico (e della teoria di Morse). In particolare, vedremo in seguito che il metodo perturbativo identifica anche punti critici che risulterebbero "invisibili" seguendo l'approccio diretto.

Example 1 Torniamo all'esempio con cui siamo partiti. Consideriamo il sistema[3] diequazioni ordinarie

$$\ddot{u} - u + \nabla V(u) = \varepsilon \nabla W(t,u) \tag{7}$$

dove $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$, e

(V1) $V \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $V(0) = 0$, $\nabla V(0) = 0$, $D^2 V(0) = 0$

(W1) $W \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, ed esiste $W^* \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{gathered} W^*(0) = 0, \\ \nabla W^*(0) = 0, \\ |W(t,u)| \leq |W^*(u)|, \\ |\nabla W(t,u)| \leq |\nabla W^*(u)|, \\ |D^2 W(t,u) - D^2 W(t,v)| \leq |D^2 W^*(u) - D^2 W^*(v)|. \end{gathered}$$

Sia E lo spazio di Sobolev $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ con l'usuale prodotto interno e norma associata.

---
[3] Eventualmente ridotto ad una sola equazione.

Per ogni $u \in E$ definiamo

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}} V(u)\,\mathrm{d}t, \quad G(u) = \int_{\mathbb{R}} W(t,u)\,\mathrm{d}t$$

Le soluzioni omocline di (7) sono i punti critici $u \in E$ del funzionale

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - F(u) + \varepsilon G(u).$$

Come visto, dobbiamo considerare il problema per $\varepsilon = 0$, cioè

$$\ddot{u} - u + \nabla V(u) = 0. \tag{8}$$

Supprremo che valgano (V1) e

(V2) esistono u_0, $\phi_0 \in E$ tali che u_0 risolve (7) e $\ker D^2 f_0(u_0) = \mathbb{R}\phi_0$

oppure

(V3) $V(u) = \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}$ con $p > 1$.

Nel primo caso, l'equazione (6) ha una soluzione omoclina $u_0 \in E$ tale che le soluzioni $\phi \in E$ di

$$\ddot{\phi} - \phi + D^2 V(u_0)\phi = 0$$

formano una varietà di dimensione uno. Definendo le traslazioni di una funzione mediante la posizione

$$u_\theta(t) = u(t+\theta)$$

risulta

$$Z = \{u_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

e

$$G(z) = \Gamma(\theta) = \int_{\mathbb{R}} W(t, u_0(t+\theta))\,\mathrm{d}t.$$

Se invece vale (V3), sia $r = r(t)$ l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} -\ddot{r} + r = r^p \\ r > 0 \\ \dot{r}(0) = 0 \\ \lim_{|t|\to\infty} r(t) = 0. \end{cases}$$

Definiamo $r_\theta(t) = r(t+\theta)$. Allora, per ogni $\xi \in S^{n-1}$, la funzione $z(t) = \xi r_\theta$ è una soluzione omoclina di (7), epertanto abbiamo prodotto una varietà di soluzioni del problema non perturbato diffeomorfa a $\mathbb{R} \times S^{n-1}$. Osserviamo esplicitamente che $G_{|Z}$ ha la forma

$$\Gamma(\xi, \theta) = \int_{\mathbb{R}} W(t, \xi r(t+\theta))\,\mathrm{d}t.$$

La verifica dell'ipotesi (h2) è una facile conseguenza del teorema di Ascoli–Arzelà.

A questo punto, è chiaro che se vale (V2), allora il seguente teorema discende dai risultati astratti visti sopra.

Theorem 2.9 *Supponiamo che valgano (V1–2) e (W1).*

(i) Se Γ ha un minimo locale proprio (o un massimo) nel punto θ_0, allora (7) possiede per $|\varepsilon|$ piccolo una soluzione omoclina vicino a $u_0(\cdot+\theta_0)$;
(ii) se Γ è coercitiva e ha k livelli critici essenziali allora, per $|\varepsilon|$ piccolo, (7) ha almeno k soluzioni omocline.

Theorem 2.10 *Supponiamo che valgano (V1–2) e (W1). Inoltre, supponiamo che W sia T–periodica nella prima variabile. Allora, per $|\varepsilon|$ sufficientemente piccolo, (7) possiede una coppia di soluzioni omocline.*

Proof. Utilizzeremo direttamente i lemmi 2.2 e 2.3. Per l'unicità locale dellafunzione w, otteniamo facilmente che per ogni t, $\theta \in \mathbb{R}$

$$w(u_0(\cdot+T+\theta),\varepsilon)(t) = w(u_0(\cdot+\theta),\varepsilon)(t+T). \tag{9}$$

Poché f_ε è periodica come funzione di θ sulla varietà

$$Z_\varepsilon = \{u_0(\cdot+\theta+T) + w(u_0(\cdot+\theta+T)\},$$

l'equazione (7) implica che, quando θ varia su un intervallo compatto di ampiezza maggiore di T, f_ε assume un massimo e un minimo. Tali punti originano due soluzioni secondo lo schema astratto. □

Example 2 Come secondo esempio, presentiamo l'analisi perturbativa di un sistema autonomo della forma

$$\ddot{u} - u + |u|^{p-1}u = \varepsilon \nabla W(u). \tag{10}$$

In questo caso, sfruttiamo pienamente il fatto che la perturbazione W è indipendente dalla variabile del tempo.

Theorem 2.11 *Supponiamo che valga (W1) dell'esempio precedente. Allora per $|\varepsilon|$ piccolo, l'equazione (10) possiede almeno due soluzioni omocline geometricamente distinte.*

Proof. Sia $n > 1$, altrimenti il teorema è banale. Come prima, definiamo $G \in C^1(E,\mathbb{R})$ mediante

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}} W(u)\,\mathrm{d}t$$

e prendiamo $\varepsilon > 0$. Siccome W non dipende dal tempo, il funzionale f_ε è invariante per traslazioni. Di conseguenza la funzione w soddisfa

$$w(\xi r_{\theta+\tau}, \varepsilon) = w(\xi r_\theta, \varepsilon)$$

per ogni θ, $\tau \in \mathbb{R}$. La varietà perturbata Z_ε ha la forma $Z_\varepsilon = \Sigma_\varepsilon \times \mathbb{R}$, dove Σ_ε è diffeomorfo a S^{n-1}. Osserviamo che f_ε non dipende da θ, ma solo da ξ. Ovviamente, f_ε ha almeno due punti critici $\xi_1(\varepsilon)$, $\xi_2(\varepsilon)$ in $\Sigma_\varepsilon \times \{0\}$, che producono due soluzioni (geometricamente distinte) della forma

$$u_{i,\varepsilon}(t) = \xi_i(\varepsilon) r(t) + w(\xi_i(\varepsilon) r(t), \varepsilon), \quad i = 1, 2.$$

□

Example 3 Discutiamo ora un esempio legato alla *biforcazione dallo spettro essenziale*. Consideriamo il problema di trovare soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -\psi'' + \lambda\psi = h(\cdot)|\psi|^{p-1}\psi & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \lim_{|x|\to\infty} \psi(x) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

che biforcano dal $\lambda = 0$, che poi è l'estremo inferiore dello spettro essenziale del laplaciano. Notiamo la somiglianza con l'Esempio 1. Tuttavia qui compare il parametro λ in una posizione diversa. Notiamo esplicitamente che sarebbe inutile tentare di applicare il metodo astratto al parametro λ. INfatti, a parte la questione della possibilità che le soluzionei di $-\Delta z = h|z|^{p-1}z$ siano degeneri, di certo ci ritroveremmo con una funzione della forma

$$\Phi_\varepsilon(u) = b + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |z_0|^2 \, \mathrm{d}x + o(\varepsilon).$$

Quindi il termine di perturbazione, calcolato sulla vatietà di punti critici, risulta costante. Questo non permette di dedurre l'esistenza di punti critici *stabili per piccole perturbazioni*.Per superare questa *impasse*, dobbiamo procedere diversamente. Supponiamo che esista $\ell > 0$ tale che $h - \ell \in L^1(\mathbb{R})$. Unapproccio è quello di cambiare le variabili, ponendo

$$u(x) = \varepsilon^{2/(1-p)} \psi(x/\varepsilon), \quad \lambda = -\varepsilon^2,$$

in modo che l'equazione (9) diventi

$$-u'' + u = \ell|u|^{p-1}u + (h(\cdot/\varepsilon) - \ell)|u|^{p-1}u. \tag{12}$$

Cercando soluzioni $u \in H^1(\mathbb{R})$, possiamo considerare (11) come una "perturbazione" dell'equazione

$$-u'' + u = \ell|u|^{p-1}u.$$

Tuttavia, sebbene l'equazione (12) abbia una struttura molto favorevole, per il momento non abbiamo gli strumenti per trattare termini perturbativi in cui ε appare in modo nonlineare. Nella prossima sezione ci occuperemo di questo caso.

Example 4 Ci occupiamo adesso di un problema di natura geometrica, in dimensione bassa.[4]Cosideriamo l'equazione ellittica

$$-\Delta u = (1 + \varepsilon K)\,\mathrm{e}^{2u} \tag{14}$$

ambientata in $\mathbb{R}^2$. Supporremo sempre che $K \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Con il cambiamento di variabile $u = v - u_0$, dove $u_0(x) = \log(1+|x|^2)$, ci riconduciamo al problema

$$-\Delta v = \frac{1+\varepsilon K}{(1+|x|^2)^2}\mathrm{e}^{2v} - \Delta u_0.$$

Siccome u_0 è una funzione radialmente simmetrica, è facile calcolare che

$$-\Delta u_0 = -2\left(\frac{1-|x|^2}{(1+|x|^2)^2} + \frac{1}{1+|x|^2}\right) = -\frac{4}{(1+|x|^2)^2}.$$

In conclusione, ci siamo ricondotti all'equazione

$$-\Delta v = g(x)\left((1+\varepsilon K(x))\mathrm{e}^{2v} - 4\right).$$

Qui abbiamo posto $g(x) = (1+|x|^2)^{-2}$.

Il problema non perturbato si ottiene banalmente ponendo $\varepsilon = 0$:

$$-\Delta v = g \cdot (\mathrm{e}^{2v} - 4),$$

ed esso possiede la varietà

$$Z = \{v_{\lambda,\xi} \mid (\lambda,\xi) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^2\}$$

dove

$$v_{\lambda,\xi}(x) = \log\frac{2\lambda(1+|x|^2)}{\lambda^2 + |x-\xi|^2}.$$

Passando a coordinate polari, si verifica agevolmente che $|\nabla v_{\lambda,\xi}| \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Tuttavia $v_{\lambda,\xi} \notin L^2(\mathbb{R}^2)$. Questo impedisce di ambientare il problema nello spazio di Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Tuttavia, per $\delta > 0$ piccolo ma fissato,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |v_{\lambda,\xi}(x)|^2 |x|^{-2-\delta}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^2}\left|\log\frac{2\lambda(1+|x|^2)}{\lambda^2+|x-\xi|^2}\right|^2 |x|^{-2-\delta}\,\mathrm{d}x \\ &\leq C(\lambda,\xi)\int_{\mathbb{R}^2}|x|^{-2-\delta}\,\mathrm{d}x < \infty.\end{aligned}$$

È così spontaneo introdurre lo spazio di Hilbert

$$H = \left\{u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\colon \int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2}|u|^2\,\mathrm{d}\mu < \infty\right\},$$

[4] Il materiale contenuto in questo esempio è dovuto alla dott. Veronica Felli (SISSA, Trieste) e all'Autore.

dove $d\mu = h(x)\,dx$ e h è una funzione di classe C^2 tale che $h(x) = |x|^{-2-\delta}$ in un intorno di $x = 0$. Possiamo allora definire il funzionale $f_\varepsilon : H \to \mathbb{R}$ come

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} g(x)e^{2v(x)}\,dx \\ - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^2} g(x)K(x)e^{2v(x)}\,dx + 4\int_{\mathbb{R}^2} g(x)v(x)\,dx. \end{aligned}$$

La dimostrazione che f_ε sia ben definito su H è relativamente facile, e si appoggia su una stima di McOwen.

Il punto cruciale è dimostrare che la varietà Z è non degenere per il funzionale f_0. A questo scopo, utilizzero alcuni fatti noti di teoria spettrale. Risulta innanzitutto che $v \in \ker D^2 f_0(v_{\lambda,\xi})$ se e solo se

$$-\Delta v = \frac{8\lambda^{-2}}{\left(1 + \left|\frac{x-\xi}{\lambda}\right|^2\right)^2}\, v.$$

A meno di un cambio di variabile $x \mapsto \lambda x + \xi$, posso supporre $\lambda = 1$ e $\xi = 0$. Dunque

$$-\Delta v = \frac{8}{(1 + |x|^2)^2} v.$$

Se π è la proiezione stereografica della sfera S^2 su $\mathbb{R}^2$, e $\tilde{v} = v \circ \pi$, l'equaizone precedente si legge

$$-\Delta_{S^2}\tilde{v} = 2\tilde{v}.$$

Quindi il nucleo $\ker D^2 f_0(v_{\lambda,\xi})$ coincide con l'autospazio dell'operatore di Laplace–Beltrami sulla sfera unitaria $-\Delta_{S^2}$ associato all'autovalore 2. Èperò noto che lo spettro di $-\Delta_{S^2}$ è discreto erappresentato da

$$\sigma(-\Delta_{S^2}) = \{\lambda_k \mid k \geq 0\} = \{k(k+1) \mid k \geq 0\}.$$

Inoltre si sa che l'autospazio associato all'autovalore λ_k ha dimensione $2k + 1$. Quindi $2 = \lambda_1$ e l'autospazio ha dimensione 3. Deduciamo che $\dim \ker D^2 f_0(v_{\lambda,\xi}) = 3$. Questo implica ovviamente la non degeneratezza.[5] Infine, usando la procedura astratta,, i punti critici stabili dellafunzione

$$\Gamma(\lambda, \xi) = G(v_{\lambda,\xi}) = 2\int_{\mathbb{R}^2} \frac{K(\lambda x + \xi)}{(1 + |x|^2)^2}\,dx$$

forniscono soluzioni dell'equazione (12). Lasciamo al lettore il compito di fornire condizioni sufficienti affinché Γ abbia punti critici.

---

[5] L'idea di dimostrare la non degeneratezza di Z confrontando appunto la sua dimensione con quella di $\ker D^2 f_0(z)$ è classica, e compare come definizione di varietà critica non degenere nel Capitolo 10 di [MW].

3. Perturbazioni non lineari

Come detto, vogliamo ora occuparci della situazione più generale in cui il parametro perturbativo ε appare non linearmente nell'equazione. Questo ci aprirà la strada verso notevoli generalizzazioni del metodo.

Schematicamente, possiamo metterci nella seguente situazione. Detto al solito E uno spazio di Hilbert reale, consideriamo la famiglia di funzionali $\{f_\varepsilon\}$ su E della forma

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - F(u) + G(\varepsilon, u).$$

Supponiamo ancora che $f_0 = \frac{1}{2}\|\cdot\|^2 - F$ abbia una varietà non degenere Z di punti critici. Precisamente

(F0) $F \in C^2(E)$
(F1) esiste una varietà Z di dimensione $d < \infty$ formata da punti critici di f_0 al livello $b \in \mathbb{R}$
(F2) $D^2F(z)$ è un operatore compatto
(F3) $T_zZ = \ker(I_E - D^2F(z))$ per ogni $z \in Z$.

Per quanto riguarda G supporremo

(G0) G è continua e $G(0, u) = 0$ per ogni $u \in E$
(G1) G è di classe C^2 nella seconda variabile
(G2) le applicazioni $(\varepsilon, u) \mapsto DG(\varepsilon, u)$ e $(\varepsilon, u) \mapsto D^2G(\varepsilon, u)$ sono continue
(G3) esistono $\alpha > 0$ e una funzione continua $\Gamma : Z \to \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{G(\varepsilon, z)}{\varepsilon^\alpha} = \Gamma(z), \quad DG(\varepsilon, z) = o(\varepsilon^{\alpha/2}).$$

Nelle formule precedenti, abbiamo convenuto di scrivere DG invece del più preciso $\partial_2 G$.

Lemma 3.1 *Supponiamo che valgano (F0–3) e (G0–3). Allora esistono $\varepsilon_0 > 0$ e una funzione liscia $w = w(\varepsilon, z) \in E$ definita per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ e $z \in Z^R$ tali che*

(i) $w(0, z) = 0$ *per ogni* $z \in Z^R$

(ii) $w(\varepsilon, z) \perp T_z Z$ *per ogni* $z \in Z^R$
(iii) $Df_\varepsilon(z + w(\varepsilon, z)) \in T_z Z$ *per ogni* $z \in Z^R$ *e ogni* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

Remark. In particolare, se $\{q_i\}$ indica un abase ortonormale di $T_z Z$, allora

$$z + w - DF(z + w) + DG(\varepsilon, z + w) = \sum_{i=1}^{d} a_i q_i. \tag{16}$$

Lemma 3.2 *Supponiamo che valgano (F0–3) e (G0–3). Se esiste* $\beta > 0$ *tale che*

$$DG(\varepsilon, z) = O(\varepsilon^\beta),$$

allora $w(\varepsilon, z) = O(\varepsilon^\beta)$.

Proof. Possiamo infatti riscrivere (16) come

$$z+w-DF(z+w)-D^2F(z)w+DG(\varepsilon, z+w)+D^2G(\varepsilon, z)w+R(w) = \sum_{i=1}^{d} a_i q_i,$$

cioè

$$w - D^2F(z)w + DG(\varepsilon, z) + D^2G(\varepsilon, z)w + R(w) = \sum_i a_i q_i, \tag{17}$$

dove

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{R(w)}{\|w\|} = 0. \tag{18}$$

Per stimare a_i, basta moltiplicare per q_i:

$$\begin{aligned} a_i = \langle w \mid q_i \rangle - \langle D^2F(z)w \mid q_i \rangle + \langle DG(\varepsilon, z) \mid q_i \rangle \\ + \langle D^2G(\varepsilon, z)w \mid q_i \rangle + \langle R(w) \mid q_i \rangle. \end{aligned}$$

Osservando che $\langle w \mid q_i \rangle = 0$ e, siccome $z = DF(z)$, abbiamo $q_i = D^2F(z)q_i$, sicché

$$\langle D^2F(z)w \mid q_i \rangle = \langle D^2F(z)q_i \mid w \rangle = 0.$$

Pertanto

$$a_i = \langle DG(\varepsilon, z) \mid q_i \rangle + \langle D^2G(\varepsilon, z)w \mid q_i \rangle + \langle R(w) \mid q_i \rangle.$$

Ricordiamo che $DG(\varepsilon, z) = O(\varepsilon^\beta)$ e $D^2G(\varepsilon, z) \to 0$, l'ultima equazione implica

$$a_i = O(\varepsilon^\beta) + \langle \widetilde{R}(w) \mid q_i \rangle \tag{19}$$

per qualche $\widetilde{R}$ tale che

$$\frac{\widetilde{R}}{\|w\|} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Poniamo $w_\varepsilon = \varepsilon^{-\beta} w(\varepsilon, z)$ e riscriviamo (17) come

$$\frac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|} = D^2F(z)\frac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|} + S(\varepsilon, z),$$

dove

$$S(\varepsilon, z) = -\frac{DG(\varepsilon, z)}{\varepsilon^\beta \|w_\varepsilon\|} - \frac{D^2G(\varepsilon, z)w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|} + \sum_i \frac{a_i}{\|w(\varepsilon, z)\|} q_i - \frac{R(w)}{\|w(\varepsilon, z)\|}.$$

Dimostriamo ora che $\|w_\varepsilon\|$ si mantiene limitata per $\varepsilon \to 0$. Se così non fosse, avremmo a meno di sottosuccessioni $\|w_\varepsilon\| \to \infty$. Per ipotesi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\|w_\varepsilon\|} \frac{DG(\varepsilon, z)}{\varepsilon^\beta} = 0,$$

poiché $D^2G(\varepsilon, z) \to 0$ abbiamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{D^2G(\varepsilon, z)w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|} = 0.$$

Ora, (18) implica che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{R(w)}{\|w(\varepsilon, z)\|} = 0$$

e da (19) deduciamo

$$\frac{a_i}{\|w(\varepsilon, z)\|} = \varepsilon^{-\beta} O(\varepsilon^\beta) \cdot \frac{1}{\|w_\varepsilon\|} + \langle \widetilde{R}(w) \mid q_i \rangle \frac{1}{\|w(\varepsilon, z)\|} \to 0$$

per $\varepsilon \to 0$. Perciò $S(\varepsilon, z) \to 0$ fortemente in E, e, grazie alla compattezza di $D^2F(z)$,

$$\frac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|} = D^2F(z)\frac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|} + S(\varepsilon, z) \to \bar{w},$$

dove $\bar{w}$ soddisfa

$$\bar{w} = D^2F(z)\bar{w} \quad \text{e} \quad \|\bar{w}\| = 1.$$

L'ipotesi (F3) implica che $\bar{w} \in T_zZ$. Poiché $\langle w_\varepsilon \mid q_i \rangle = 0$ abbiamo anche che $\langle \bar{w} \mid q_i \rangle = 0$, cioè $\bar{w} \in (T_zZ)^\perp$. Questo implica finalmente $\bar{w} = 0$, che è una contraddizione. □

Lemma 3.3 *Sia*

$$\Phi_\varepsilon(z) := f_\varepsilon(z + w(\varepsilon, z)).$$

Se $D\Phi_\varepsilon(\bar{z}) = 0$, allora $\bar{z} + w(\varepsilon, \bar{z})$ è un punto critico di f_ε in E.

Lemma 3.4 *Vale il seguente sviluppo asintotico per Φ_ε:*

$$\Phi_\varepsilon(z) = b + \varepsilon^\alpha \Gamma(z) + o(\varepsilon^\alpha). \tag{20}$$

Proof. Omessa, in quanto basata su semplici calcoli e sui lemmi precedenti. □

A questo punto, è chiaro che partendo dall'equazione (20) possiamoricostruire teoremi di esistenza simili a quelli dimostrati nellasezone precedente.

Torniamo adesso all'esempio 3 della sezione precedente, che possiamo discutere con i nuovi strumenti appena introdotii. Ricordiamo che vogliamo studiare la biforcazione dallo spettro essenziale per il problema

$$\begin{cases} \psi'' + \lambda\psi + h(\cdot)|\psi|^{p-1}\psi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \\ \psi \in H^1(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{21}$$

dove $p > 1$. Ricordiamo il cambiamento di variabili

$$u(x) = \varepsilon^{\frac{2}{1-p}} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \lambda = -\varepsilon^2,$$

che riduce (21) a

$$-u'' + u = h(x/\varepsilon)|u|^{p-1}u \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Supponiamo inizialmente che esista $L > 0$ tale che

(A) $h - L \in L^1(\mathbb{R})$ e $\int_{\mathbb{R}} (h(x) - L)\, \mathrm{d}x \neq 0$.

Riscriviamo (21) nella forma

$$-u'' + u = L|u|^{p-1}u + (h(x/\varepsilon) - L)\,|u|^{p-1}u. \tag{23}$$

Siamo dunque nella situazione astratta rappresentata da

$$E = H^1(\mathbb{R}), \quad \|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(|u'|^2 + |u|^2\right) \mathrm{d}x,$$

$$f_0(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{L}{p+1}\int_{\mathbb{R}} |u|^{p+1},$$

$$G(\varepsilon, u) = \begin{cases} -\dfrac{1}{p+1}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - L\right)|u|^{p+1}\,\mathrm{d}x & \text{se } \varepsilon \neq 0 \\ 0 & \text{se } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Lemma 3.5 *$G : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R}$ è continua e di classe C^2 rispetto a $u \in E$. Inoltre le mappe*

$$(\varepsilon, u) \mapsto \partial_u G(\varepsilon, u)$$
$$(\varepsilon, u) \mapsto \partial_u^2 G(\varepsilon, u)$$

sono continue.

Proof. Omettiamo i lunghi dettagli. □

Sia z_0 l'unica soluzione positiva pari di $-u'' + u = Lu^p$; risulta che $Z = \{z_\xi = z_0(\cdot + \xi) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$ è unavarietà di punti critici per f_0, e valgono (F0–3).

Lemma 3.6 *Per ogni $z_\xi \in Z$, risulta*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{G(\varepsilon, z_\xi)}{\varepsilon} = \Gamma(\xi) = -\frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} (h(x) - L)\, \mathrm{d}x \cdot z_0(\xi)^{p+1}.$$

In particolare, $\Gamma'(0) = 0$.

Proof. Calcoliamo semplicemente

$$\begin{aligned} -\frac{p+1}{\varepsilon} G(\varepsilon, z_\xi) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - L \right) |z_\xi(x)|^{p+1}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} (h(y) - L) z_0(\varepsilon y + \xi)^{p+1}\, \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

e concludiamo per convergenza dominata. □

Similmente si dimostra il seguente

Lemma 3.7 *$G'(\varepsilon, z_\xi) = O(\varepsilon)$.*

Applicando i metodi astratti, deduciamo che esiste u_ε, soluzione di (19), della forma

$$u_\varepsilon(x) = z_0(x + \xi_\varepsilon) + w_\varepsilon(\xi_\varepsilon)$$

dove

$$\xi_\varepsilon \to 0$$

e

$$\|u_\varepsilon\|_{L^s} \leq C \quad \forall s \geq 2.$$

Ricordando il cambiamento di variabile fatto, abbiamo

$$\|\psi\|_{L^s}^s = \varepsilon^{\frac{2s}{p-1}} \int_{\mathbb{R}} |u(\varepsilon x)|^s\, \mathrm{d}x = \varepsilon^{\frac{2s}{p-1} - 1} \|u\|_{L^s}^s.$$

Prendiamo $s > \frac{p-1}{2}$ e otteniamo la biforcazione dallo spettro essenziale.

Consideriamo adesso il caso in cui

$$\int_{\mathbb{R}} (h(x) - L)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Poniamo

$$k(x) = \int_{[0,x]} (h(s) - L)\, \mathrm{d}s.$$

È facile vedere che

$$k \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$$

ed esiste finito $L_1 = \lim_{|x|\to\infty} k(x)$.

Supponiamo che

(B) $k - L \in L^1(\mathbb{R})$ e $\int_{\mathbb{R}} (k(x) - L_1)\,\mathrm{d}x \neq 0$.

Sotto queste ipotesi il Lemma 8 continua a valere, e inoltre

Lemma 11 *Supponiamo che k soddisfi (B). Allora*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{G(\varepsilon, z_\xi)}{\varepsilon^2} = \Gamma_1(\xi) = z_0(\xi)^p z_0'(\xi) \cdot \int_{\mathbb{R}} (k(x) - L_1)\,\mathrm{d}x.$$

Proof. Integrando per parti troviamo

$$\begin{aligned}
(p+1)G(\varepsilon, z_\xi) &= -\int_{\mathbb{R}} \left(h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - L\right) z_\xi(x)^{p+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} k(x/\varepsilon)\, D z_\xi^{p+1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon \int_{\mathbb{R}} (k(x/\varepsilon) - L_1)\ D z_\xi^{p+1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}} (k(x) - L_1)\, D z_0^{p+1}(\varepsilon x + \xi)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Concludiamo ancora per convergenza dominata. □

Lemma 3.8 *Supponiamo che h soddisfi (B). Allora*

$$G'(\varepsilon, z_\xi) = O(\varepsilon^{3/2}).$$

Proof. Integrando per parti, per ogni $v \in E$,

$$\begin{aligned}
\langle G'(\varepsilon, z_\xi) \mid v\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} \left(h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - L\right) z_\xi(x)^p v\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} k(x/\varepsilon)\, D(z_\xi^p v)(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon \int_{\mathbb{R}} (k(x/\varepsilon) - L_1)\ v D z_\xi^p(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} (k(x/\varepsilon) - L_1)\, z_\xi^p\, Dv\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Stimiamo separatamente i due ultimi termini.:

$$\begin{aligned}
\left|\varepsilon \int_{\mathbb{R}} (k(x/\varepsilon) - L_1)\, z_\xi^p\, Dv\,\mathrm{d}x\right| &\leq c_1 \varepsilon \|v\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |(k(x/\varepsilon) - L_1)|\ \mathrm{d}x \\
&\leq c_1' \varepsilon^2 \|v\| \int_{\mathbb{R}} |(k(x) - L_1)|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon\int_{\mathbb{R}}(k(x/\varepsilon)-L_1)\,z_\xi^p\,Dv\,\mathrm{d}x\right| &\le \varepsilon\left[\int_{\mathbb{R}}(k(x/\varepsilon)-L_1)^2 z_\xi^{2p}\right]^{1/2}\left[\int_{\mathbb{R}}|Dv|^2\right]^{1/2}\\ &\le c_2\varepsilon\|v\|\left[(k(x/\varepsilon)-L_1)^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}\\ &\le c_2\varepsilon^2\|v\|\left[\int_{\mathbb{R}}(k(x)-L_1)^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Le ultime stime completano la dimostrazione. □

Da ultimo, analizziamo il caso in cui h è periodica. In particolare, supponiamo che

(C) $h \in C(\mathbb{R})$, h è periodica di periodo $T = 1$, e $\int_{\mathbb{R}} h = m > 0$.

Riscriviamo l'equazione (21) come

$$-u'' + u = m|u|^{p-1}u + (h(x/\varepsilon) - m)\,|u|^{p-1}u \tag{24}$$

e definiamo

$$\bar{h}(x) = \int_{[0,x]} (h(s) - m)\,\mathrm{d}s.$$

In questo caso prendiamo

$$F(u) = \frac{m}{p+1}\int_{\mathbb{R}} |u|^{p+1}\,\mathrm{d}x,$$

$$G(\varepsilon, u) = \begin{cases} -\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}}(h(x/\varepsilon)-m)|u|^{p+1}\,\mathrm{d}x & \text{se } \varepsilon \neq 0\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Inoltre sia $Z = \{z_\xi = z_0(\cdot + \xi) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$ dove z_0 è la soluzioni positiva pari di

$$-u'' + u = mu^p.$$

Lemma 3.9 *Supponiamo che h soddisfi (C). Allora*

$$\lim_{(\varepsilon,u)\to(0,u_0)} G(\varepsilon, u) = 0.$$

Proof. Un'integrazione per parti fornisce

$$\begin{aligned}(p+1)G(\varepsilon,u) &= -\int_{\mathbb{R}}(h(x/\varepsilon)-m)|u|^{p+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \varepsilon(p+1)\int_{\mathbb{R}}\bar{h}(x/\varepsilon)|u|^{p-1}uu'\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Siccome $uu' \to u_0u_0'$ in L^1, otteniamo la tesi. □

In questo caso, studiamo direttamente la funzione

$$\Phi_\varepsilon(\xi) = f_\varepsilon(z_\xi + w(\varepsilon, \xi)).$$

Lemma 3.10 *Supponiamo che valga (C). Allora*

$$w(\varepsilon, \xi + \varepsilon)(x) = w(\varepsilon, \xi)(x + \varepsilon).$$

Proof. Sappiamo che w è l'unica soluzione dell'equazione

$$-(z_\xi + w)'' + (z_\xi + w) - |z_\xi + w|^{p-1}(z_\xi + w) = \\ \left(h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - m\right)|z_\xi + w|^{p-1}(z_\xi + w).$$

Poniamo $\omega(x) = w(\varepsilon, \xi)(x_\varepsilon)$. Quindi ω risolve l'equazione

$$\begin{aligned} -(z_\xi(x+\varepsilon) + \omega)'' + (z_\xi(x+\varepsilon) + \omega) - |z_\xi(x+\varepsilon) + \omega|^{p-1}(z_\xi(x+\varepsilon) + \omega) \\ = \left(h\left(\frac{x+\varepsilon}{\varepsilon}\right) - m\right) - |z_\xi(x+\varepsilon) + \omega|^{p-1}(z_\xi(x+\varepsilon) + \omega) \\ = \left(h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - m\right) - |z_\xi(x+\varepsilon) + \omega|^{p-1}(z_\xi(x+\varepsilon) + \omega). \end{aligned}$$

Poiché

$$z_{\xi+\varepsilon}(x) = z_\xi(x + \varepsilon),$$

otteniamo che ω e $w(\varepsilon, \xi + \varepsilon)$ soddisfano la medesima equazione, e l'asserto segue dall'unicità. □

Lemma 3.11 *Supponiamo che h soddisfi (C). Allora*

$$\Phi_\varepsilon(\xi) = \Phi_\varepsilon(\xi + \varepsilon).$$

Proof. Semplici calcoli, ricordando il Lemma 3.10. □

Poiché Φ_ε è periodica, essa sarà costante[6] oppure avrà almeno un massimo e un minimo, che producono due soluzioni.

3.1 Indici di Morse

Concludiamo questo capitolo con un teorema attinente alla natura topologica dei punti critici individuati mediante il metodo perturbativo.Per ragioni di convenienza, supporremo che gli elementi della varietà critica Z siano indicizzati da una variabile $\theta \in \mathbb{R}^d$, e pertanto scriveremo z_θ per indicare il generico

[6] Nel qual caso avremo infinite soluzioni.

elemento di Z. Similmente, in accordo con la simbologia moderna, useremo le notazioni

$$\partial_i z = \frac{\partial z}{\partial \theta_i}(\theta), \quad \partial_{ij} z = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta_i \partial \theta_j} z(\theta).$$

Z di punti critici di f_0 goda della seguente proprietà:

(H) Per ogni $i \neq j$, risulta $\langle \partial_i z \mid \partial_j z \rangle = 0$, e $\|\partial_i z\| = c$ (c costante indipendente da i e θ), $\langle \partial_{ij} z \mid \partial_\ell z \rangle = 0$ per ogni $i, j, \ell = 1, \ldots, d$.

Per quanto riguarda le funzioni F, G faremo due tipi diversi di ipotesi. Ricordiamo che α e Γ sono state definite in (G3).

(F4) F è di classe C^4.

(G4) G è di classe C^4 rispetto alla seconda variabile, e l'applicazione

$$(\varepsilon, u) \mapsto G'''(\varepsilon, u)$$

è continua.

(G5) Γ è C^2 e, se $\{\theta_\varepsilon\}$ è una famiglia tale che $\theta_\varepsilon \to \theta$ per $\varepsilon \to 0$, allora

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{-\alpha} \langle G'(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon}) \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} \rangle + \varepsilon^{-\alpha} \langle G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon}) \partial_i z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_j z_{\theta_\varepsilon} \rangle\right] = \partial_{ij} \Gamma(\theta)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\alpha/2} G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon}) \partial_i z_{\theta_g e} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\alpha/2} G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon}) \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\alpha/2} G'''(\varepsilon, z_{\theta_g e})[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] = 0.$$

(F4)' F è di classe C^3.

(G4)' G è di classe C^3 rispetto alla seconda variabile, e l'applicazione

$$(\varepsilon, u) \mapsto G'''(\varepsilon, u)$$

è continua.

(G5)' $G'(\varepsilon, u) = O(\varepsilon^\alpha)$ per ogni $u \in E$, Γ è C^2 e, se $\{\theta_\varepsilon\}$ è una famiglia tale che $\theta_\varepsilon \to \theta$ per $\varepsilon \to 0$, allora

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{-\alpha} \langle G'(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon}) \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} \rangle + \varepsilon^{-\alpha} \langle G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon}) \partial_i z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_j z_{\theta_\varepsilon} \rangle\right] = \partial_{ij} \Gamma(\theta)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\alpha/2} G''(\varepsilon, z_{\theta_g e}) \partial_i z_{\theta_\varepsilon} = 0.$$

Enunciamo adesso il teorema principale di questa sezione.

Theorem 3.12 *Supponiamo che valgano* **(H)**, *(F0–F4) e (G0–G5). Dato $\theta \in \mathbb{R}^d$, e per ogni ε abbastanza piccolo, supponiamo che esista un punti critico $u_\varepsilon \in Z^\varepsilon$ di f_ε, tale che $u_\varepsilon = z_{\theta_\varepsilon} + w(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})$ e $\lim_{\varepsilon \to 0} \theta_\varepsilon = \theta$. Supponiamo* *che* $z_\theta = \lim_{\varepsilon\to 0} z_{\theta_\varepsilon}$ *sia un punto critico non degenere per la restrizione di* f_0 *a* $(T_{z_\theta} Z)^\perp$*, con indice di Morse uguale a* m_0*, e che la matrice hessiana* $D^2\Gamma(\theta)$ *si positiva o negativa definita. Allora* u_ε*, per* ε *abbastanza piccolo, è un punto critico non degenere di* f_ε *con indice di Morse* m_ε *dato da*

$$m_\varepsilon = \begin{cases} m_0 & \textit{se } D^2\Gamma(\theta) \textit{ è positiva definita} \\ m_0 + d & \textit{se } D^2\Gamma(\theta) \textit{ è negativa definita.} \end{cases}$$

Di conseguenza, i punti critici di f_ε *formano una curva continua.*

Proof. Scriviamo

$$E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^- \tag{25}$$

dove $E^0 = T_{z_\theta} Z$, $\dim E^- = m_0$, ed esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{cases} D^2 f_0(z_\theta)[v,v] > \delta\|v\|^2 & \text{per ogni } v \in E^+ \\ D^2 f_0(z_\theta)[v,v] < -\delta\|v\|^2 & \text{per ogni } v \in E^-. \end{cases}$$

Dall'ipotesti $Df_0(z_\eta) = 0$ per ogni $\eta \in \mathbb{R}^d$ segue facilmente che

$$D^2 f_0(z_\theta)[\partial_i z_\theta, \partial_j z_\theta] = 0.$$

Definiamo

$$\varphi_i^0 = \frac{\partial_i z_\theta}{\|\partial_i z_\theta\|}.$$

La famiglia $\{\varphi_i^0\}_{i=1,\dots,d}$ è una base ortonormale di E^0. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ gli autovalori della matrice simmetrica $D^2 f_0(z_\theta)$ su E^-. Naturalmente $\lambda_i < 0$ per ogni i, e sia $\lambda_0 = \max_i \lambda_i < 0$. Sia $\{t_i^0\}_{i=1,\dots,m_0}$ una base ortonormale di E^- tale che $D^2 f_0(z_\theta)[t_i^0, t_j^0] = 0$ se $i \neq j$, $D^2 f_0(z_\theta)[t_i^0, t_i^0] = \lambda_i$. Per l'ortogonalità della decomposizione (25), abbiamo $\langle \varphi_i^0 \mid \varphi_j^0 \rangle = 0$ per ogni i, j. Definiamo

$$\varphi_i^\varepsilon = \frac{\partial_i z_{\theta_\varepsilon}}{\|\partial_i z_{\theta_\varepsilon}\|}.$$

La famiglia $\{\varphi_i^\varepsilon\}_{i=1,\dots,d}$ è una base ortonormale di $T_{z_{\theta_\varepsilon}} Z$, spazio che denotiamo più brevemente con E_ε^0. Osserviamo che $\varphi_i^\varepsilon \to \varphi_i^0$ per $\varepsilon \to 0$.Per $i = 1, \dots, m_0$, vogliamo trovare τ_i^ε tale che, posto $t_i^\varepsilon = t_i^0 + \tau_i^\varepsilon$, risulti

$$\langle t_i^\varepsilon \mid \varphi_i^\varepsilon \rangle = 0 \tag{26}$$

per ogni i, j. In altre parole vogliamo che

$$0 = \langle t_i^\varepsilon \mid \varphi_i^\varepsilon \rangle = \langle t_i^0 + \tau_i^\varepsilon \mid \varphi_j^0 + (\varphi_j^\varepsilon - \varphi_j^0) \rangle = \langle t_i^0 \mid \varphi_j^\varepsilon - \varphi_j^0 \rangle + \langle \tau_i^\varepsilon \mid \varphi_j^\varepsilon \rangle,$$

da cui segue

$$\langle \tau_i^\varepsilon \mid \varphi_j^\varepsilon \rangle = -\langle t_i^0 \mid \varphi_j^\varepsilon - \varphi_j^0 \rangle.$$

Pertanto, definiamo

$$\tau_i^\varepsilon = \sum_{j=1}^{d} -\langle t_i^0 \mid \varphi_j^\varepsilon - \varphi_j^0 \rangle \varphi_j^\varepsilon,$$

e (26) è automaticamente soddisfatta. Osserviamo poi che $\tau_i^\varepsilon \to 0$ per $\varepsilon \to 0$, sicché

$$t_i^\varepsilon \to t_i^0.$$

Dato che $\{t_i^0\}_i$ è una base ortonormale, i vettori $\{t_i^\varepsilon\}_i$ sono linearmente indipendenti per ε abbastanza piccolo. Definiamo E_ε^- come lo spazio m_0–dimensionale generato da $\{t_i^\varepsilon\}_i$. Per ogni $v \in E_\varepsilon^-$, $\|v\| = 1$, abbiamo $v = \sum_{k=1}^{m_0} \beta_k t_k^\varepsilon$ e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[v,v] &= \sum_{l,k=1}^{m_0} \beta_l \beta_k D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[t_l^0 + \tau_l^\varepsilon, t_k^0 + \tau_k^\varepsilon] \\ &= \sum_{l,k=1}^{m_0} \beta_l \beta_k D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[t_l^0, t_k^0] + o(1), \end{aligned}$$

dove $o(1)$ è un infinitesimo per $\varepsilon \to 0$, uniformemente rispetto a v. Per le ipotesi (F0), (G1), (G2), otteniamo

$$D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[t_l^0, t_k^0] \to D^2 f_0(z_\theta)[t_l^0, t_k^0].$$

Siccome $\lim_{\varepsilon \to 0} t_k^\varepsilon = t_k^0$ e $\{t_k^0\}_k$ è un sistema ortonormale, è facile dimostrare che per ε sufficientemente piccolo da $\|v\| = 1$ segue $\sum_{k=1}^{m_0} \beta_k^2 \geq \frac{1}{2}$. Dunque

$$D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[v,v] = \sum_{k=1}^{m_0} \lambda_k \beta_k^2 + o(1) \leq \frac{\lambda_0}{2} + o(1),$$

dove $o(1)$ è un infinitesimo per $\varepsilon \to 0$, uniformemente rispetto a v, se $\|v\| = 1$. Deduciamo che per $\varepsilon \ll 1$, $D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)$ è negativa definita in E_ε^-. Definiamo adesso

$$E_\varepsilon^+ = \left(E_\varepsilon^0 \oplus E_\varepsilon^-\right)^\perp,$$

così che $E = E_\varepsilon^+ \oplus E_\varepsilon^- \oplus E_\varepsilon^0$. Dimostriamo adesso che $D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)$ è positiva definita su E_ε^+. Sia P^+ la proiezione ortogonale di E su E^+.Affermiamo che esistono $\delta_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tali che se $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ e $v \in E_\varepsilon^+$ con $\|v\| = 1$, allora

$$D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[v,v] > \delta_0.$$

Se non fosse vero, allora esisterebbero delle successioni $\{\varepsilon_k\}$, $\{v_k\} \subset E_\varepsilon^+$, con $\|v_k\| = 1$ e $\varepsilon_k \to 0$ per $k \to \infty$, tali che

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k} > D^2 f_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})[v_k, v_k] = \\ &= D^2 f_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})[P^+ v_k, P^+ v_k] + 2D^2 f_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})[P^+ v_k, v_k - P^+ v_k] \\ &+ D^2 f_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})[v_k - P^+ v_k, v_k - P^+ v_k]. \end{aligned} \tag{27}$$

Ricordiamo che

$$v_k - P^+ v_k = \sum_{k=1}^{m_0} \langle v_k \mid t_i^0 \rangle t_i^0 + \sum_{i=1}^{d} \langle v_k \mid \varphi_i^0 \rangle \varphi_i^0,$$

e che, essendo $v_k \in E^+_{\varepsilon_k}$, è $\langle v_k \mid t_i^{\varepsilon_k} \rangle = 0$ e $\langle v_k \mid \varphi_i^{\varepsilon_k} \rangle = 0$. Perció abbiamo

$$\langle v_k \mid t_i^0 \rangle = \langle v_k \mid t_i^0 - t_i^{\varepsilon_k} \rangle \to 0$$

per $k \to \infty$, poiché $t_i^{\varepsilon_k} \to t_i^0$ e $\{v_k\}$ è limitata. Allo stesso modo deduciamo che

$$\langle v_k \mid \varphi_i^0 \rangle \to 0$$

e infine

$$v_k - P^+ v_k \to 0. \tag{28}$$

Ora (27) diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &> D^2 f_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k})[P^+ v_k, P^+ v_k] + o(1) = \\ &= D^2 f_0(z_\theta)[P^+ v_k, P^+ v_k] + \left(D^2 f_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) - D^2 f_0(z_\theta)\right)[P^+ v_k, P^+ v_k] + o(1). \end{aligned} \tag{29}$$

Grazie alle ipotesi di continuità abbiamo

$$\left(D^2 f_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) - D^2 f_0(z_\theta)\right)[P^+ v_k, P^+ v_k] = o(1),$$

mentre

$$D^2 f_0(z_\theta)[P^+ v_k, P^+ v_k] > \delta \|P^+ v_k\|^2,$$

poiché $P^+ v_k \in E^+$. Usando (28) troviamo anche

$$\|P^+ v_k\| \to 1.$$

Pertanto da (29) discende

$$\frac{1}{k} > \delta + o(1),$$

relazione palesemente contraddittoria. Perció la nostra affermazione è completamente dimostrata. Facciamo il punto della situazione: abbiamo dimostrato che per ε sufficientemente piccolo, $D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)$ è definita negativa su E_ε^- e definita positiva su E_ε^+. Vogliamo studiare il comportamento di $D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)$ su E_ε^0. Dimostreremo che $D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)$ è positiva o negativa definita in modo concorde a $D^2 \Gamma(\theta)$, e il teorema sarà allora dimostrato.Inizialmente ricordiamo che

$$\begin{gathered} D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] = \\ \langle \partial_i z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_j z_{\theta_\varepsilon} \rangle - \langle F''(u_\varepsilon) \partial_i z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_j z_{\theta_\varepsilon} \rangle + \langle G''(u_\varepsilon) \partial_i z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_j z_{\theta_\varepsilon} \rangle. \end{gathered}$$

Dal momento che $\partial_i z_{\theta_\varepsilon} \in \ker[I_E - F''(z_{\theta_\varepsilon})]$ e $w(0, z_{\theta_\varepsilon}) = 0$, sviluppando $F''(u_\varepsilon)$ e $G''(\varepsilon, u_\varepsilon)$ e ponendo $w_\varepsilon = w(\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
&D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] = \\
&= \langle \partial_i z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_j z_{\theta_\varepsilon} \rangle - \langle F''(u_\varepsilon)\partial_i z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_j z_{\theta_\varepsilon} \rangle - \langle F'''(z_{\theta_\varepsilon})[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] \mid w_\varepsilon \rangle \\
&+ \langle G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})\partial_i z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_j z_{\theta_\varepsilon} \rangle + \langle G'''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] \mid w_\varepsilon \rangle + O(\|w_\varepsilon\|^2) \\
&= -\langle F'''(z_{\theta_\varepsilon})[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] \mid w_\varepsilon \rangle + \langle G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})\partial_i z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_j z_{\theta_\varepsilon} \rangle + \\
&\quad + \langle G'''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] \mid w_\varepsilon \rangle + O(\|w_\varepsilon\|^2).
\end{aligned}
$$

Sappiamo già che $w_\varepsilon = o(\varepsilon^{\alpha/2})$, perciò da (G5) deduciamo

$$
\langle G'''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] \mid w_\varepsilon \rangle = o(\varepsilon^\alpha)
$$

e dunque

$$
\begin{aligned}
&D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] = \\
&- \langle F'''(z_{\theta_\varepsilon})[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] \mid w_\varepsilon \rangle + \langle G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})\partial_i z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_j z_{\theta_\varepsilon} \rangle + o(\varepsilon^\alpha). \quad (30)
\end{aligned}
$$

Ricordando le proprietà di w_ε, possiamo scrivere

$$
z_{\theta_\varepsilon} + w_\varepsilon - F'(z_{\theta_\varepsilon} + w_\varepsilon) + G'(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon} + w_\varepsilon) = \sum_l a_l \partial_l z_{\theta_\varepsilon}.
$$

Sviluppando F' e G' troviamo

$$
\begin{aligned}
z_{\theta_\varepsilon} + w_\varepsilon - F'(z_{\theta_\varepsilon}) - F''(z_{\theta_\varepsilon})w_\varepsilon + G'(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon}) + G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})w_\varepsilon + O(\|w_\varepsilon\|^2) \\
= \sum_l a_l \partial_l z_{\theta_\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Prendendo il prodotto scalare con $\partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon}$, ricordando **(H)** e il fatto che $z_{\theta_\varepsilon} = F'(z_{\theta_\varepsilon})$, troviamo

$$
\begin{aligned}
\langle w_\varepsilon \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} \rangle - \langle F''(z_{\theta_\varepsilon})w_\varepsilon \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} \rangle + \langle G'(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} \rangle \\
+ \langle G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})w_\varepsilon \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} \rangle + O(\|w_\varepsilon\|^2) = 0.
\end{aligned}
$$

Per (G5) si ottiene

$$
\langle G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})w_\varepsilon \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} \rangle = \langle G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})\partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} \mid w_\varepsilon \rangle = o(\varepsilon^\alpha),
$$

e infine

$$
\langle w_\varepsilon \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} \rangle - \langle F''(z_{\theta_\varepsilon})w_\varepsilon \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} \rangle + \langle G'(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon}) \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} \rangle + o(\varepsilon^\alpha) = 0. \quad (31)
$$

Derivando due volte l'equazione $z_\eta = F'(z_\eta)$ rispetto a $\eta \in \mathbb{R}^n$ e calcolando tali derivate in $\eta = \theta_\varepsilon$, troviamo

$$
\partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} = F''(z_{\theta_\varepsilon})\partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} + F'''(z_{\theta_\varepsilon})[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}].
$$

Prendiamo adesso il prodotto scalare di ambo i membri con w_ε, e sostituiamo in (31):

$$
-\langle F'''(z_{\theta_\varepsilon})[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] \mid w_\varepsilon \rangle = \langle G'(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon}) \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon} \rangle + o(\varepsilon^\alpha). \quad (32)
$$

Da questo e da (30) abbiamo

$$D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] = \langle G'(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon}) \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon}\rangle + \langle G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})\partial_i z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_j z_{\theta_\varepsilon}\rangle + o(\varepsilon^\alpha).$$

Dividendo ora per ε^α, passando al limite per $\varepsilon \to 0$ e ricordando (G5) otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha} D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] &= \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\alpha}\langle G'(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon}) \mid \partial_{ij} z_{\theta_\varepsilon}\rangle + \varepsilon^{-\alpha}\langle G''(\varepsilon, z_{\theta_\varepsilon})\partial_i z_{\theta_\varepsilon} \mid \partial_j z_{\theta_\varepsilon}\rangle \\ &= \partial_{ij}\Gamma(\theta). \end{aligned}$$

Poiché $D^2\Gamma(\theta)$ è definita, tale sarà anche $D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}]$, per ε sufficientemente piccolo.

Facciamo ancora un breve riassunto: supponiamo per fissare le idee che $D^2\Gamma(\theta)$ sia definita positiva. Abbiamo appena dimostrato che esiste una costante $\delta > 0$ tale che

$$\begin{aligned} D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] &\le -\delta\|v^-\|^2 \quad \text{per ogni } v \in E_\varepsilon^- \\ D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] &\ge \delta\varepsilon^\alpha\|v^0\|^2 \quad \text{per ogni } v \in E_\varepsilon^0 \\ D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[\partial_i z_{\theta_\varepsilon}, \partial_j z_{\theta_\varepsilon}] &\ge \delta\|v^+\|^2 \quad \text{per ogni } v \in E_\varepsilon^+. \end{aligned}$$

Per completare la dimostrazione, dobbiamo dimostrare che $D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)$ è positiva definita in $E_\varepsilon^+ \oplus E_\varepsilon^0$. Grazie a (G5), abbiamo che per ogni $v^+ \in E_\varepsilon^+$ e ogni $V^0 \in E_\varepsilon^0$,

$$|D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[v^+, v^0]| \le o(\varepsilon^{\alpha/2})\|v^+\|\,\|v^0\|.$$

Pertanto, per ε piccolo e qualche $\delta_1 > 0$ opportuno, otteniamo

$$\begin{aligned} D^2 f_\varepsilon(u_\varepsilon)[v^+ + v^0, v^+ + v^0] &\ge \delta\|v^+\|^2 + \delta\varepsilon^\alpha\|v^0\|^2 - o(\varepsilon^{\alpha/2})\|v^+\|\,\|v^0\| \\ &\ge \delta_1\|v^+ + v^0\|^2. \end{aligned}$$

La dimostrazione del teorema è adesso completa. □

4. Applicazioni all'equazione di Schrödinger

Dopo aver visto i fondamenti astratti del metodo perturbativo, ci proponiamo di applicare queste idee ad alcuni problemi più specifici. In particolare, verrà posta molta attenzione alle cosiddette *equazioni di tipo Schrödinger con perturbazione singolare*.

Con questa terminologia ci si riferisce a equazioni semilineari di tipo ellittico, rappresentabili nella forma

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(\cdot)u = f(\cdot, u) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{33}$$

dove Ω è un dominio, possibilmente illimitato.

Un'equazione come la (33) può essere studiata da più di un punto di vista.Poiché generalmente la funzione $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$è non lineare, sotto ipotesi adeguate su f stessa e su $V : \Omega \to \mathbb{R}$, la (33) possiede una struttura variazionale. In altritermini, è possibile ricercare le soluzioni (deboli, e *a posteriori* spesso classiche) di (33) come punti critici di un funzionale

$$f_\varepsilon : H \to \mathbb{R},$$

H essendo uno spazio di Hilbert che specificheremo in seguito.

Nel seguito tratteremo estesamente l'equazione

$$-\varepsilon^2 \Delta u + u + V(\cdot)u = |u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{34}$$

accoppiata alla condizione

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Qui $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è un potenziale, il cui significato è riconducibile a quello di un potenziale elettrico. Per semplificare la trattazione, supporremo $n \geq 3$ e $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$. Dunque l'equazione (33) rappresentaun'equazione *sottocritica* su tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$. La sceltaparticolare di $f(u) = |u|^{p-1}u$ è significativa in quantorappresentante un modello fisico dell'ottica non lineare.

Per iniziare, notiamo che mediante un cambiamento di variabili possiamo "desingolarizzare" l'azione del parametro ε studiando l'equazione equivalente

$$-\Delta u + u + V(\varepsilon x)u = u^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{35}$$

Remark. In effetti, il passaggio appena fatto non è, in un certo senso, *essenziale*. Con questo intendiamo dire che sarebbe possibile studiare le soluzioni di (33) lasciando il parametro ε^2 davanti alla parte differenziale dell'equazione. Questa strada è stata percorsa variamente, a partire dai lavori di M. del Pino e P. Felmer. È però chiaro che quest'idea non può portare a niente di buono dal punto di vista del nostro approccio. Infatti, ponendo $\varepsilon = 0$ nella (33), nonotteniamo affatto un'equazione differenziale, a conferma dell'espressione *equazioni perturbate singolarmente*.

Osserviamo che se definiamo lo spazio $H = H^1(\mathbb{R}^n)$ e il funzionale $f_\varepsilon : H \to \mathbb{R}$ mediante la posizione

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + |u|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} V(x)|u(x)|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p+1},$$

allora le soluzioni di (34) corrispondono ai punti critici di f_ε, e pertanto possiamo cercare di usare il metodo di perturbazione già introdotto. Esplicitamente, avremmo

$$\begin{aligned} f_0(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - F_0(u) \\ F_0(u) &= \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p+1} \\ G(\varepsilon, u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} V(\varepsilon x)|u(x)|^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

In sostanza, per $\varepsilon = 0$, dobbiamo risolvere il problema "non perturbato"

$$-\Delta u + u = |u^{p-1}|u \tag{36}$$

e identificare una varietà non degenere di sue soluzioni. Siccome lavoriamo in dimensione n, genericamente maggiore od uguale a 3, non è possibile risolvere esplicitamente (36) come nel caso unidimensionale. È tuttavia noto che (36) possiede soluzione "praticamente" unica. Precisamente, è stato dimostrato da Kwong che il sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = u^p & \text{in } \mathbb{R}^n \\ u > 0 \\ u(0) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} u(x) \\ \lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

possiede una ed una sola soluzione radiale, esponenzialmente decrescente all'infinito. Questo risultato è una combinazione dei teoremi di tipo Gidas–Ni–Nirenberg e di un'analisi dell'equazione differenziale ordinaria indotta nel momento in cui cerchiamo soluzioni radialmente simmetriche. Indichiamo dunque con $z \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$ quest'unica soluzione. Vista l'invarianza di (36) rispetto all'azione del gruppo (non compatto) delle traslazioni di $\mathbb{R}^n$, è ovvio che

$$Z = \{z_\theta = z(\cdot + \theta) \mid \theta \in \mathbb{R}^n\}$$

definisce una varietà di soluzioni di (36). Il fatto che Z sia anchenon degenere nel senso da noi introdotto precedentemente è contenutonel seguente lemma, per la cui dimostrazione rimandiamo a [Oh].

Lemma 4.1 *Una funzione $\phi \in H$ soddisfa*

$$-\Delta\phi + \phi = p z_\theta^{p-1} \phi$$

se e solo se $\phi \in \operatorname{span}\{\partial_i z_\theta \mid 1 \le i \le n\}$.[7]

Sembrerebbe quindi lecito applicare il metodo esposto nel secondo capitolo, e ottenere così dei risultati di esistenza. Sfortunatamente, le ipotesi di regolarità sul $G : \mathbb{R} \times H \to \mathbb{R}$ non sono tutte soddisfatte se V è solo una funzione regolare e *limitata*. Infatti,

$$\tfrac{\partial^2}{\partial u^2}\, G(\varepsilon, u) : (\phi, \psi) \mapsto 2 \int_{\mathbb{R}^n} V(\varepsilon x)\phi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

non è continua nella coppia di variabili (ε, u).[8] Questa mancanza di regolarità, tipica dell'equazione di Schrödinger, non appare banalmente rimediabile. Essa infatti impedisce il funzionamento del teorema della funzione implicita che ci consentiva di costruire la funzione w.

Tuttavia, come mostreremo subito, è possibile fare appello direttamente al teorema del punto fisso di Banach–Caccioppoli[9] per la costruzione di w. Per chiare ragioni di brevità non presenteremo le dimostrazioni in dettaglio, ma ci accontenteremo di passare in rassegna le idee che si dimostrano utili per questa generalizzazione del metodo perturbativo. Seguiremo [ABC]. Definiamo $V_\varepsilon : x \mapsto V(\varepsilon x)$, $h(u) = u^{p-1}u$. Senza ledere la generalità, supporremo sempre $V(0) = 0$. Consideriamo poi l'operatore $S_\varepsilon \colon W^{2,2}(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ dato da

$$S_\varepsilon(u) = -\Delta u + u + V_\varepsilon u - h(u).$$

Sviluppando al primo ordine, abbiamo dunque

$$S_\varepsilon(z_\theta + w) = S_\varepsilon(z_\theta) + S'_\varepsilon(z_\theta)w + N_\theta(w),$$

dove $N_\theta(w) = o(\|w\|)$ per θ e ε limitati. Sia K_θ il nucleo dell'operatore lineare $S'_0(z_\theta)$, e sia $K_\theta^\perp$ il complemento ortogonale[10] di K_θ. Sia P_θ la proiezione ortogonale di L^2 su $K_\theta^\perp$. Infine, definiamo l'operatore $L_{\theta,\varepsilon} = P_\theta S'_\varepsilon(z_\theta)$. È stato dimostrato in [FW] che dato $\bar\theta > 0$ esiste $\gamma > 0$ tale che per ε abbastanza piccolo, $|\theta| \le \bar\theta$, e ogni $\phi \in K_\theta^\perp$ risulta

[7] L'ultima affermazione significa che ϕ è esprimibile come combinazione lineare a coefficienti reali delle derivate parziali prime di z_θ.
[8] Questa osservazione sembra originariamente dovuta a Silvia Cingolani.
[9] O teorema delle contrazioni.
[10] Rispetto al prodotto scalare di L^2.

$$\|L_{\theta,\varepsilon}\phi\|_{W^{2,2}} \geq \gamma\|\psi\|^2_{L^2}.$$

Ne consegue che la mappa

$$F_{\theta,\varepsilon}(w) = -L^{-1}_{\theta,\varepsilon}(P_\theta S_\varepsilon(z_\theta) + P_\theta N_\theta(w))$$

è una contrazione per $\varepsilon >$ piccolo e $|\theta| \leq \bar{\theta}$. Quindi possiamo determinare univocamente una funzione

$$w : \{\theta \in \mathbb{R}^n : |\theta| \leq \bar{\theta}\} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to W^{2,2}$$

tale che $w(\theta, \varepsilon) \in K^\perp_\theta$ e

$$P_\theta S_\varepsilon(z_\theta + w(\theta, \varepsilon)) = 0 \quad \forall (\theta, \varepsilon) \in \{|\theta| \leq \bar{\theta}\} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

Inoltre tale funzione è regolare rispetto a θ. La dimostrazione di questo fatto è un'applicazione del teorema della funzione implicita, e procede schematicamente come segue. Fissiamo ε tale che $\varepsilon < |\varepsilon_0|$, e applichiamo il teorema alla funzione

$$H_\varepsilon(\theta, w) = w - F_{\varepsilon,\theta}(w), \quad w \in K^\perp_\theta.$$

Ponendo $\omega = w(\theta, \varepsilon)$ troviamo

$$\partial_2 H_\varepsilon(\theta, \omega) : v \mapsto v - L^{-1}_{\theta,\varepsilon} P_\theta [h'(z_\theta + \omega) - h'(z_\theta)]v.$$

Osserviamo esplicitamente che $\partial_2 H_\varepsilon$ è un operatore di Fredholm di indice zero poiché $h'(0) = 0$ e ω, z_θ decadono a zero all'infinito. Consideriamo l'equazione $\partial_2 H_\varepsilon(\theta, \omega)(v) = 0$, cioè

$$v = L^{-1}_{\theta,\varepsilon} P_\theta [h'(z_\theta + \omega) - h'(z_\theta)]v. \tag{37}$$

Ma abbiamo già visto che $\lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\varepsilon) = 0$, e deduciamo che (37) possiede solo la soluzione nulla, purché ε sia abbastanza piccolo. Questo dimostra che l'unico punto fisso $w(\theta, \varepsilon)$ di $F_{\theta,\varepsilon}$ è regolare rispetto a θ. Un ragionamento del tutto analogo dimostra che $\partial_1 w(\theta, \varepsilon) \to$ per $\varepsilon \to 0$, uniformemente rispetto a θ tale che $|\theta| < \bar{\theta}$. In conclusione,

Lemma 4.2 *Per ogni $\bar{\theta} > 0$, esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ ed esiste una funzione continua $w = w(\theta, \varepsilon)$ definita su $T = B(0, \bar{\theta}) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, tale che $w \in K^\perp_\theta$, $w(\theta, 0) = 0$, e*

$$P_\theta S_\varepsilon(z_\theta + w(\theta, \varepsilon)) = 0 \quad \textit{per ogni } (\theta, \varepsilon) \in T.$$

Di più, w è regolare rispetto alla prima variabile, e $\partial_1 w(\theta, \varepsilon) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$, uniformemente sui limitati.

Similmente a quanto avevamo già fatto nel quadro "astratto", studiamo ora il comportamento asintotico di w rispetto a ε.

Per questo, introduciamo l'ipotesi principale:

Ipotesi (V). Il potenziale $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e possiede un punto critico $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Precisamente, esiste unintero positivo pari $m > 0$ tale che $D^k V(x_0) = 0$ per ogni $k < m$, mentre $D^m V(x_0)$ è definita positiva o negativa.

Lemma 4.3 *Per ogni $n \leq m-1$, risulta*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{w(\theta, \varepsilon)}{\varepsilon^n} = 0$$

fortemente in $W^{2,2}$. Inoltre, per $n = m$, il limite a primo membro esiste.

Proof. Infatti, dividendo l'equazione $w = F_{\theta,\varepsilon}(w)$ per ε^n e ponendo per comodità $w_\varepsilon = \varepsilon^{-n} w$, troviamo che

$$w_\varepsilon = -L^{-1}_{\theta,\varepsilon}(P_\theta \psi_\varepsilon + w_\varepsilon R(\varepsilon)), \tag{38}$$

dove $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} V(\varepsilon x) z_\theta(x)$ e $R(\varepsilon) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$\left| \frac{V(\varepsilon x)}{\varepsilon^n} z_\theta(x) \right| = \left| \frac{V(\varepsilon x)}{(\varepsilon |x|)^n} |x|^n z_\theta(x) \right| \leq M |x|^n z_\theta(x)$$

per qualche costante $M > 0$. L'ipotesi **(V)** implica allora

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V(\varepsilon x)}{\varepsilon^n} = \frac{1}{m!} Q_m(x),$$

dove Q_m rappresenta la derivata m-esima di V in x_0. Grazie al decadimento esponenziale di z_θ a zero, possiamo applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, e concludere che per $n \leq m-1$ risulta

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{V(\varepsilon x)}{\varepsilon^n} z_\theta(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Similmente si dimostra che $\psi_\varepsilon \to 0$ in L^2. Questo e (38)dimostrano che $w_\varepsilon \to 0$ in $W^{2,2}$. Se $n = m$, gli stessiragionamenti ci portano ad affermare che l'ultima affermazione del lemma è vera. □

D'ora in poi, $\bar{\theta} > 0$ sarà fissato. Ovviamente, per adesso c'è ancora molta arbitrarietà sul suo valore, e vedremo in seguito come sceglierlo opportunamente.

Definiamo

$$Z_\varepsilon = \{ u \in H \mid u = z_\theta + w(\theta, \varepsilon) \}.$$

Osserviamo che per $\varepsilon = 0$ ritroviamo la varietà Z.

Lemma 4.4 *Per ε piccolo, Z_ε è una varietà differenziabile, localmente diffeomorfa a Z. Inoltre Z_ε è un vincolo naturale per f_ε.*

Proof. La dimostrazione è del tutto analoga a quella vista nel caso astratto. □

Siamo così arrivati al problema della determinazione di un punto critico di f_ε ristretto al vincolo naturale Z_ε. Poniamo ancora una volta

$$\Phi_\varepsilon(\theta) = f_\varepsilon(z_\theta + w(\theta, \varepsilon)).$$

Premettiamo il risultato finale, trattando solo il caso in cui V possiede in x_0 un minimo. Il caso del massimo è analogo. Faremo vedere che per ε sufficientemente piccolo, la funzione Φ_ε possiede un (unico) punto di minimo θ_ε localizzato vicino a zero.

Introduciamo la funzione di Melnikov

$$\Gamma : \theta \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} Q_m(x)|z_\theta(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Lemma 4.5 *Γ ha un minimo stretto per $\theta = 0$. Più precisamente, $\nabla\Gamma(0) = 0$ e $D^2\Gamma(0)$ è una matrice definita positiva.*

Proof. Sia $z \colon x \mapsto \gamma(|x|)$. Scriveremo anche $r = |x|$. Allora

$$\partial_i z(x) = \gamma'(r)\frac{x_i}{r}, \quad \partial^2_{ij} z(x) = \gamma''(r)\frac{x_i x_j}{r^2} + \delta_{ij}\frac{\gamma'(r)}{r} - \gamma'(r)\frac{x_i x_j}{r^3}$$

e troviamo

$$\partial_i \Gamma(0) = 2\int_{\mathbb{R}^n} Q_m(x) z(x) \partial_i z(x) \, \mathrm{d}x = 2\int_{\mathbb{R}^n} Q_m(x)\gamma(|x|)\gamma'(|x|)\frac{x_i}{|x|} \, \mathrm{d}x.$$

Siccome l'ultima integranda è una funzione dispari nella variabile x_i, se integriamo prima rispetto a tale variabile, troviamo $\partial_i\Gamma(0) = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Studiamo adesso le derivate seconde di Γ in $\theta = 0$. È possibile dimostrare "a mano" che valgono le relazioni

$$\partial^2_{ij}\Gamma(0) = 0 \quad \text{per ogni } i \neq j$$

$$\partial^2_{ii}\Gamma(0) = \frac{2}{n}\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(|x|) \cdot \frac{|\gamma'(|x|)|}{|x|} \cdot \langle \nabla Q_m(x) \mid x \rangle \, \mathrm{d}x$$

per ogni i. Poiché Q è omogenea di grado m e 0 è un minimo di V, risulta che $\langle \nabla Q_m(x) \mid x \rangle > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, sicché $\partial^2_{ii}\Gamma(0) > 0$ per ogni i. La dimostrazione è completa. $\square$

Scegliamo finalmente il valore di $\bar{\theta}$. Sia B la palla di $\mathbb{R}^n$ centrata in zero di raggio $\bar{\theta}$. Abbiamo appena visto che possiamo scegliere tale raggio in modo che

$$\Gamma(\theta) > \Gamma(0) \quad \forall\, \theta \in \overline{B} \setminus \{0\}. \tag{39}$$

Ponendo $u(\theta, \varepsilon) = z_\theta + w(\theta, \varepsilon)$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
\Phi_\varepsilon(\theta) &= \frac{1}{2}\|u(\theta,\varepsilon)\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} V_\varepsilon |u(\theta,\varepsilon)|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u(\theta,\varepsilon)|^{p+1} \\
&= \frac{1}{2}\|z_\theta\|^2 + \langle z_\theta \mid w(\theta,\varepsilon)\rangle + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} V_\varepsilon |u(\theta,\varepsilon)|^2 \\
&\quad - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |z_\theta|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^n} |z_\theta|^p w(\theta,\varepsilon) + o(\varepsilon^m).
\end{aligned}
$$

Poicheé z_θ soddisfa $-\Delta z + \lambda z = z^p$, segue

$$
\langle z_\theta \mid w\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |z_\theta|^p w.
$$

Sostituendo nell'espressione precedente, troviamo

$$
\Phi_\varepsilon(\theta) = b + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} V_\varepsilon |u(\theta,\varepsilon)|^2 + o(\varepsilon^m), \tag{40}
$$

dove $b = f_0(z_\theta)$.

Lemma 4.6

$$
\int_{\mathbb{R}^n} V_\varepsilon \cdot (z_\theta + w(\theta,\varepsilon))^2 = \frac{\varepsilon^m}{m!}\Gamma(\theta) + o(\varepsilon^m).
$$

Proof. Come sopra, abbiamo la stima

$$
\left| \frac{V(\varepsilon x)}{\varepsilon^m} z_\theta(x)^2 \right| \le M|x|^m z_\theta(x)^2.
$$

Ma allora

$$
\int_{\mathbb{R}^n} V_\varepsilon z_\theta^2 = \frac{\varepsilon^m}{m!}\int_{\mathbb{R}^n} Q_m |z_\theta|^2 + o(\varepsilon^m) = \frac{\varepsilon^m}{m!}\Gamma(\theta) + o(\varepsilon^m).
$$

Inoltre

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} V_\varepsilon |w(\theta,\varepsilon)|^2 = o(\varepsilon^m), \\
&\int_{\mathbb{R}^n} V_\varepsilon w(\theta,\varepsilon) z_\theta = o(\varepsilon^m),
\end{aligned}
$$

e la tesi segue facilmente. □

Lemma 4.7 *Per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo,*

$$
\Phi_\varepsilon(0) < \inf\{\Phi_\varepsilon(\theta) \colon |\theta| = \bar{\theta}\}. \tag{41}
$$

Proof. Usando i risultati raccolti fin qui,

$$
\Phi_\varepsilon(\theta) = b + \frac{1}{2m!}\varepsilon^m \Gamma(\theta) + o(\varepsilon^m).
$$

Pertanto

$$\Phi_\varepsilon(\theta) - \Phi_\varepsilon(0) = \frac{1}{2m!}\varepsilon^m \left(\Gamma(\theta) - \Gamma(0)\right) + o(\varepsilon^m).$$

Sappiamo già che $\Gamma(\theta) - \Gamma(0) \leq \delta > 0$ se $|\theta| = \bar{\theta}$, e dunque

$$\Phi_\varepsilon(\theta) - \Phi_\varepsilon(0) > 0$$

per ogni θ tale che $|\theta| = \bar{\theta}$, e per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo. Questo dimostra (41). $\square$

Theorem 4.8 *Supponiamo che valga* **(V)** *e che* V *sia limitata. Sia* $\lambda > -\inf V$ *e* $1 < p < 2^* - 1$*. Allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *abbastanza piccolo, l'equazione (34) possiede una soluzione positiva.*

Proof. Grazie a (33), la funzione Φ_ε ha un minimo in qualche $\theta = \theta_\varepsilon \in B$, il quale genera una soluzione $u_\varepsilon = z_{\theta_\varepsilon} + w(\theta_\varepsilon, \varepsilon)$. Ovviamente, lungo una successione, θ_ε converge verso qualche $\theta_0 \in \overline{B}$ per $\varepsilon \to 0$. Ma allora per ogni $\theta \in \overline{B}$,

$$0 \leq \Phi_\varepsilon(\theta) - \Phi_\varepsilon(\theta_\varepsilon) = \frac{1}{2m!}\varepsilon^m (\Gamma(\theta - \Gamma(\theta_\varepsilon))) + o(\varepsilon^m).$$

Dividendo per ε^m e facendo tendere ε a zero, troviamo

$$\Gamma(\theta) - \Gamma(\theta_0) \geq 0$$

per ogni $\theta \in \overline{B}$. Ma allora θ_0 è l'unico minimo di Γ in B, cioè $\theta_0 = 0$. Quindi $u_\varepsilon \to z_0$ in H per $\varepsilon \to 0$. $\square$

Osserviamo che il teorema precedente è abbastanza "sottile" nelle sue conclusioni. In effetti, non possono esistere soluzioni che si concentrano in punti regolari di V, cioè in punti ove il gradiente di V è diverso da zero. Per dimostrare questa affermazione, seguiamo ancora [ABC]. Una strada alternativa consiste nell'uso dell'identità variazionale di Pucci e Serrin, come dimostrato recentemente in [PS] e [SS]. Introduciamo qualche notazione comoda. Sia

$$\Psi(\varepsilon, u) = \nabla f_\varepsilon(u),$$

in modo che $\Psi(0, z) = 0$ per ogni $z \in Z$. Useremo ora la notazione z per denotare un elemento generico di Z.

Definition 4.9 Diciamo che $\hat{z} \in Z$ è un punto di biforcazione per Ψ se esiste una successione $\{(\varepsilon_k, u_k)\}$ in $\mathbb{R} \times H$ tale che $\Psi(\varepsilon_k, u_k) = 0$, $\varepsilon_k \to 0$, $u_k \to \hat{z}$ e $\varepsilon_k \neq 0$.

In base ai risultati visti precedentemente, ogni $u_{\varepsilon_k} \in H$ vicina a Z può essere rappresentata come $u_{\varepsilon_k} = z_k + w_k$ con $z_k = z_{\theta_k} \in Z$ e $w_k = w(\theta_k, \varepsilon_k)$. Scriveremo $\Psi(\varepsilon, z, w)$ invece di $\Psi(\varepsilon, z + w)$.

Lemma 4.10 *Condizione necessaria affiché $\hat{z} \in Z$ sia un punto di biforcazione per Ψ è che*

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{-1}(I - P_{\theta_k})\Psi(\varepsilon_k, z_k, w_k) = 0 \tag{42}$$

La dimostrazione di questo lemma è una semplice conseguenza della definizione di punto di biforcazione per Ψ e delle proprietà di w.

Theorem 4.11 *Sia V una funzione limitata e supponiamo che esistano $\theta \in \mathbb{R}$ e soluzioni $u_\varepsilon \in H$ di (34) tali che $u_\varepsilon \to z_0(\cdot + \theta)$ per $\varepsilon \to 0$. Allora $\nabla V(0) = 0$. Di più se $V(x) = qx^m + o(|x|^m)$ con $q \neq 0$ e $m \in 2\mathbb{N}$, allora $\theta = 0$.*

Proof. Tratteremo solo il caso unidimensionale, per semplicità. Sia $z_\theta(x) = z_0(x+\theta)$. L'ipotesi dice che z_θ è un punto di biforcazione di Ψ e dunque vale (42). Questo a sua volta implica

$$\int_{\mathbb{R}} V'(0)xz_\theta(x)z'_\theta(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

il che implica immediatamente $V'(0) = 0$. Ora, sia $\delta = \varepsilon^m$ e

$$\Psi^*(\delta, u) = \frac{\partial f^*}{\partial u}(\delta, u),$$

dove

$$f^*(u) = f_0(u) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} V(\delta^{\frac{1}{m}}x)|u(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Chiaramente, z_θ è un punto di biforcazione di Ψ se e solo se è un punto di biforcazione di Ψ^*. Pertanto possiamo ancora usare (42) con δ al posto di ε e Ψ^* al posto di Ψ. Essendo

$$V(\delta^{\frac{1}{m}}x) = q\delta x^m + o(\delta x^m),$$

la condizione (42) diventa

$$q\int_{\mathbb{R}} x^m z_\theta(x)z'_\theta(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Poiché $q \neq 0$, la relazione $\int_{\mathbb{R}} x^m z_\theta(x)z'_\theta(x)\,\mathrm{d}x = 0$ implica $\int_{\mathbb{R}}(x-\theta)^m z_0 z'_0\,\mathrm{d}x = 0$, e infine $\theta = 0$ poiché m è un numero pari per ipotesi. □

Per concludere, indichiamo qualche possibile estensione ad equazioni con una nonlinearità più generale di $h(u) = |u|^{p-1}u$. Consideriamo una funzione tale che

(g1) $g(0) = G'(0) = 0$, $|g(u)| \leq a_1 a_2 |u|^p$, $p < 2^* - 1$. Per $G(u) = \int_0^u g(s)\,\mathrm{d}s$, esiste $\beta > 2$ tale che $\beta G(u) \leq ug(u)$ per ogni $u \in \mathbb{R}$.

Poniamo

$$I(u,\gamma) = \gamma u g'(u) - (\gamma+2)g(u) + 2\lambda u,$$

e supponiamo che
(g2) per ogni $U > 0$ esiste $\gamma(U) > 0$, dependente da U in modo continuo, tale che $I(u,\gamma) > 0$ per $0 < u < U$ e $I(u,\gamma) < 0$ per $u > U$. Se valgono (g1) e (g2), si può dimostrare che l'equazione

$$-\Delta u + \lambda u = g(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

possiede una ed una sola soluzione z radiale, di classe C^2. Definendo la varietà $Z = \{z(\cdot + \theta) \mid \theta \in \mathbb{R}^n\}$, risulta ancora che Z è non degenere (per il funzionale non perturbato che risulta associato naturalmente all'equazione). Quindi possiamo concludere con il

Theorem 4.12 *Supponiamo che valga* **(V)** *e che V sia limitata. Sia $\lambda > -\inf V$ e supponiamo che valgano (g1) e (g2). Allora per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, l'equazione*

$$-\varepsilon^2 \Delta u + \lambda u + V u = g(u)$$

possiede una soluzione positiva.

4.1 Soluzioni multiple

Come visto nel paragrafo precedente, un punto critico *molto stabile* di V produce soluzioni dell'equazione (34). Inoltre, se una famigle di soluzionei $\{u_\varepsilon\}$ si concentra in un punto, necessariamente si tratterà di un punto critico di V.In questo paragrafo, seguendo [AMS], ci proponiamo di studiare (34) sotto ipotesi meno locali. In effetti, sottoponendo il metodo di perturbazione fin qui descritto a una revisione opportuna, dimostreremo che (34) possiede soluzioni ogni volta che V abbia una varietà (immersa) di punti critici non troppo degeneri.Considereremo dunque il problema

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u + V u = K u^p & \text{in } \mathbb{R}^n \\ u > 0 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{43}$$

A differenza di (34), troviamo qui un ulteriore potenziale $K\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sul quale sarà necessario fare opportune ipotesi di lavoro. Precisamente:
(V1) $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\|V\|_{C^2} < \infty$;
(V2) $\inf_{\mathbb{R}^n}(1+V) > 0$
(K1) $K \in C^2(\mathbb{R}^n)$, K è limitato, e $K > 0$.

Innanzitutto, non è restrittivo supporre che $V(0) = 0$. Con il consueto cambiamento di variabile $x \mapsto \varepsilon x$, la prima equazione di (35) diventa

$$-\Delta u + u + V_\varepsilon u = K_\varepsilon u^p \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{44}$$

dove $V_\varepsilon(x) = V(\varepsilon x)$ e $K_\varepsilon(x) = K(\varepsilon x)$. Grazie alle ipotesi (V1–2) e (K1), le soluzioni di (44) sono i punti critici del funzionale $f_\varepsilon \colon H^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definito da

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + |u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} V_\varepsilon |u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon |u|^{p+1}.$$

Chiaramente, $f_\varepsilon \in C^2(H^1(\mathbb{R}^n))$. Cercheremo soluzioni di (44) opportunamente vicine alle soluzioni di

$$-\Delta u + u + V(\varepsilon\xi)u = K(\varepsilon\xi)u^p \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{45}$$

per qualche $\xi \in \mathbb{R}^n$ che sceglieremo in seguito. Le soluzioni di (45) sono i punti critici del funzionale

$$F^{\varepsilon\xi}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + |u|^2 + \frac{1}{2}V(\varepsilon\xi)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 - \frac{1}{p+1}K(\varepsilon\xi)\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p+1}.$$

Il punto cruciale di questo ragionamento è che le soluzioni di (45) possono essere scritte in modo praticamente esplicito. Infatti, sia U la soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta U + U + U^p \quad \text{in } \mathbb{R}^n \\ U > 0 \\ U(0) = \max_{\mathbb{R}^n} U. \end{cases}$$

Come già sottolineato precedentemente, U è unica e radialmente simmetrica. Posto

$$\beta(\varepsilon\xi) = (1 + V(\varepsilon\xi))^{1/2}, \quad \alpha(\varepsilon\xi) = \left(\frac{1 + V(\varepsilon\xi)}{K(\varepsilon\xi)}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

è immediato verificare che la funzione

$$z^{\varepsilon\xi}(x) = \alpha(\varepsilon\xi)U(\beta(\varepsilon\xi)x)$$

verifica (45). Essendo (45) un'equazione autonoma, la varietà

$$Z^{\varepsilon\xi} = \{z^{\varepsilon\xi}(\cdot - \xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

risulta una varietà critica di $F^{\varepsilon\xi}$. Ecco che intravvediamo la speranza di applicare una variante del metodo perturbativo, che potremmo definire *parametrizzata* da ξ. Resta da capire come procedere tecnicamente per sfruttare le proprietà di non-degeneratezza di $Z^{\varepsilon\xi}$. Come prima cosa, osserviamo che dal decadimento esponenziale di U all'infinito segue facilmente che

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} z^{\varepsilon\xi}(x - \xi) = -\frac{\partial}{\partial x_i} z^{\varepsilon\xi}(x - \xi) + O(\varepsilon).$$

Lemma 4.13 *Per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *e* $\varepsilon > 0$ *risulta*

$$\|\nabla f_\varepsilon(z^{\varepsilon\xi})\| \leq C\left(\varepsilon|\nabla V(\varepsilon\xi)| + \varepsilon|\nabla K(\varepsilon\xi)| + \varepsilon^2\right)$$

In qualche senso, il Lemma 4.13 ci autorizza a considerare gli elementi di $Z^{\varepsilon\xi}$ come soluzioni approssimate di (44).

Proposition 4.14 *Sia* $L_{\varepsilon,\xi} \colon (T_{z^{\varepsilon\xi}})^\perp \to (T_{z^{\varepsilon\xi}})^\perp$ *l'operatore definito univocamente da* $\langle L_{\varepsilon,\xi} v \mid w\rangle = D^2 f_\varepsilon(z^{\varepsilon\xi})[v,w]$. *Per ogni* $\bar\xi > 0$ *esiste* $C > 0$ *tale che per ogni* ε *abbastanza piccolo si abbia*

$$\|L_{\varepsilon,\xi} v\|^2 \geq C\|v\|^2 \tag{46}$$

per ogni $\xi \in B(0,\bar\xi)$ *e* $v \in (T_{z^{\varepsilon\xi}})^\perp$.

Proof. È chiaro che $T_{z^{\varepsilon\xi}} = \operatorname{span}\{\partial_{\xi_i} z^{\varepsilon\xi} \mid i = 1,2,\dots,n\}$. Usando la stima prima del Lemma 4.13, e posto $V = \operatorname{span}\{z^{\varepsilon\xi}, \partial_{x_1} z^{\varepsilon\xi}, \dots \partial_{x_n} z^{\varepsilon\xi}\}$, ci basta verificare che (46) vale per ogni $v \in \operatorname{span}\{z^{\varepsilon\xi}, \phi\}$, dove $\phi \perp V$. La dimostrazione di questo fatto a sua volta può essere spezzata in due:

$$|\langle L_{\varepsilon,\xi} z^{\varepsilon\xi} \mid z^{\varepsilon\xi}\rangle|^2 \leq -C_1 < 0 \tag{47}$$

e

$$|\langle L_{\varepsilon,\xi}\phi \mid \phi\rangle|^2 \geq C_2\|\phi\|^2 \quad \forall\phi \perp V. \tag{48}$$

La relazione (47) segue facilmente dal fatto che $z^{\varepsilon\xi}$ è un punto critico di mountain pass per $F^{\varepsilon\xi}$. Invece (48) richiede stime più accurate, e può essere dimostrata mediante opportuni troncamenti. □

Confrontando questo risultato con quello visto nel paragrafo precedente, dovrebbe essere chiaro il nostro obiettivo. Siccome il termine di perturbazione $\int V_\varepsilon |u|^2$ non è sufficientemente regolare per poter applicare il teorema della funzione implicita, vogliamo costruire una deformazione di $Z^{\varepsilon\xi}$ che risulti ancora un vincolo naturale per f_ε, usando però direttamente il teorema del punto fisso di Banach per determinare una funzione del tutto analoga alla $w(\varepsilon,z)$ usata finora. Questo ci conduce a invertire la derivata seconda di f_ε lungo le direzioni ortogonali al suo nucleo, che per la nondegeneratezza di $Z^{\varepsilon\xi}$ coincide proprio con lo spazio tangente a $Z^{\varepsilon\xi}$.

Lemma 4.15 *Per* $\varepsilon > 0$ *abbastanza piccolo e* $|\xi| \leq \bar\xi$ *esiste una ed una sola funzione* $w = w(\varepsilon,\xi) \in (T_{z^{\varepsilon\xi}} Z^{\varepsilon\xi})^\perp$ *tale che* $\nabla f_\varepsilon(z^{\varepsilon\xi} + w(\varepsilon,\xi)) \in T_{z^{\varepsilon\xi}} Z^{\varepsilon\xi}$. *Inoltre* w *è di classe* C^2 *(resp.* $C^{1,p-1}$*) se* $p \geq 2$ *(resp.* $1 < p < 2$*). Infine il funzionale* $\Phi_\varepsilon(\xi) = f_\varepsilon(z^{\varepsilon\xi} + w(\varepsilon,\xi))$ *soddisfa*

$$\nabla\Phi_\varepsilon(\xi) = 0 \iff \nabla f_\varepsilon(z^{\varepsilon\xi} + w(\varepsilon,\xi)) = 0.$$

Proof. La dimostrazione è essenzialmente un'applicazione del principio delle contrazioni. Infatti, sia $P = P_{\varepsilon\xi}$ la proiezione ortogonale su $(T_{z^{\varepsilon\xi}} Z^{\varepsilon\xi})^\perp$. Vogliamo trovare una soluzione $w \perp T_{z^{\varepsilon\xi}} Z^{\varepsilon\xi}$ dell'equazione

$$P\nabla f_\varepsilon(z^{\varepsilon\xi} + w(\varepsilon,\xi)) = 0.$$

Per il teorema di Taylor, $\nabla f_\varepsilon(z^{\varepsilon\xi} + w(\varepsilon,\xi)) = \nabla f_\varepsilon(z^{\varepsilon\xi}) + D^2 f_\varepsilon(z^{\varepsilon\xi})w + R(z^{\varepsilon\xi}, w)$, dove $\|R(z^{\varepsilon\xi}, w)\| = o(\|w\|)$. Poiché abbiamo già dimostrato che $L_{\varepsilon,\xi}$ è invertibile nelle direzioni ortogonali al tangente di $Z^{\varepsilon\xi}$, dobbiamo trovare w tale che $w = N_{\varepsilon,\xi}(w)$, dove

$$N_{\varepsilon,\xi}(w) = -(L_{\varepsilon,\xi})^{-1}(P\nabla f_\varepsilon(z^{\varepsilon\xi}) + PR(z^{\varepsilon\xi}, w).$$

Il Lemma 24 implica che

$$\|N_{\varepsilon,\xi}(w)\| \leq C(\varepsilon|\nabla V(\varepsilon\xi)| + \varepsilon|\nabla K(\varepsilon\xi)| + \varepsilon^2) + O(\|w\|).$$

Da questa stima segue direttamente che, se ε è molto piccolo e ξ si mantiene limitato, allora $N_{\varepsilon,\xi}$ è un'applicazione contrattiva da una piccola palla in $(T_{z^{\varepsilon\xi}} Z^{\varepsilon\xi})^\perp$ in se stessa. Pertanto, in tale palla, esiste uno ed un solo punto fisso $w = w(\varepsilon,\xi)$ che definisce in tal modo una funzione di ξ per ogni ε piccolo. La regolarità di w rispetto a ξ segue — adesso sì — dal teorema della funzione implicita. L'ultima affermazione[11] segue come nel Lemma 2 del capitolo 2. □

Pertanto, siamo ricondotti, come di consueto, allo studio delfunzionale finito–dimensionale Φ_ε definito nel Lemmaprecedente. Più esplicitamente, risulta (scrivendo z al posto di$z^{\varepsilon\xi}$ e w al posto di $w(\varepsilon,\xi)$)

$$\Phi_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2}\|z+w\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} V_\varepsilon |z+w|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon |z+w|^{p+1}.$$

Ricordiamo adesso che

$$\|z\|^2 = -V(\varepsilon\xi)\int_{\mathbb{R}^n} |z|^2 + K(\varepsilon\xi)\int_{\mathbb{R}^n} |z|^{p+1}$$

e

$$\langle z \mid w\rangle = -V(\varepsilon\xi)\int_{\mathbb{R}^n} zw + K(\varepsilon\xi)\int_{\mathbb{R}^n} |z|^p w.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\Phi_\varepsilon(\xi) = & \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2}K(\varepsilon x) - \frac{1}{p+1}K(\varepsilon\xi)\right) z^{p+1} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(V(\varepsilon x) - V(\varepsilon\xi)\right) z^2 \\
& + \int_{\mathbb{R}^n} \left(V(\varepsilon x) - V(\varepsilon\xi)\right) zw + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} V_\varepsilon w^2 + \frac{1}{2}\|w\|^2 \\
& + K(\varepsilon\xi)\int_{\mathbb{R}^n} z^p w \\
& - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} K(\varepsilon x)\left((z+w)^{p+1} - z^{p+1} - (p+1)z^p w\right).
\end{aligned}$$

[11] Equivalente al fatto che $\{z^{\varepsilon\xi} + w(\varepsilon,\xi) \mid |\xi| \leq \bar{\xi}\}$ è un vincolo naturale per f_ε.

Usando ancora il teorema di Taylor, deduciamo che, per ε piccolo,

$$\Phi_\varepsilon(\xi) = C_1 A(\varepsilon\xi) + O(\varepsilon),$$

dove $C_1 > 0$ è una costante e la funzione ausiliaria A è definita come

$$A(x) = \frac{(1+V(x))^{\frac{p+1}{p-1}-\frac{n}{2}}}{K(x)^{\frac{2}{p-1}}}.$$

Similmente, potremmo dimostrare che

$$\nabla\Phi_\varepsilon(\xi) = C_2 \nabla A(\varepsilon\xi) + \varepsilon^{\min\{1,p-1\}+1} R_\varepsilon(\xi),$$

dove $|R_\varepsilon(\xi)| \leq C_3$.

Siamo pronti ad enunciare ora i teoremi di esistenza e molteplicità per l'equazione (36).

Theorem 4.16 *Supponiamo che valgano (V1), (V2) e (K1). Supponiamo inoltre che la funzione A possieda un punto critico non degenere. Allora, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, (36) possiede una soluzione ad un picco.*

Una prima generalizzazione è contenuta nel prossimo teorema.

Theorem 4.17 *Supponiamo che valgano (V1), (V2), (K1). Sia X un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ sul quale A raggiunge un minimo locale isolato o un massimo locale isolato. Precisamente, ciò significa rispettivamente che esiste $\delta > 0$ tale che*

$$b \equiv \inf_{x\in\partial X_\delta} A(x) > a \equiv A_{|X},$$

o

$$\sup_{x\in\partial X_\delta} A(x) < a.$$

Qui $X_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x,X) < \delta\}$. Allora esiste $\varepsilon_\delta > 0$ tale che, per ogni $\varepsilon < \varepsilon_\delta$, (36) possiede almeno $\mathrm{cat}(X, X_\delta)$ *soluzioni che si concentrano attorno a punti di X_δ.*

Remark. Osserviamo che l'uso della categoria di Lusternik–Schnirelman è legittimato dal fatto che X è un insieme di punti di massimo o minimo locali isolati. La dimostrazione del teorema 4.17, che omettiamo rinviando ad [AMS], è essenzialmente basata sulla riduzione finito–dimensionale svolta in precedenza, e sullo studio dei sottolivelli della funzione Φ_ε, per ε abbastanza piccolo. In [AMS] appare anche un'ulteriore estensione che copre il caso in cui A possieda una varietà compatta M di punti critici, con la richiesta che M soddisfi la cosiddetta *non degeneratezza di Bott.* In tal caso, l'invariante topologico "giusto" non è più la categoria, bensì la *cup-length.* Non ci soffermiamo però sui dettagli.

Remark. Il metodo appena discusso non si applica, naturalmente, alla sola equazione di Schrödinger classica (34). Recentemente, un approccio del tutto analogo si è dimostrato utile per il problema

$$\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{i}}\nabla - A\right)^2 u + Vu = K|u|^{p-1}u$$

dove stavolta le soluzioni sono a valori complessi (si veda [CS]), e al problema

$$-\varepsilon^2 \operatorname{div}(J\nabla u) + Vu = f(u)$$

essendo $J\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N\times N}$ una funziona a valori nelle matrici reali simmetriche (si veda [PS]).

5 Il problema della curvatura scalare

Come premesso nell'Introduzione, in questo capitolo tratteremo più approfonditamente qualche problema ellittico della forma

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}} + \varepsilon b(x,u) \\ u > 0, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{49}$$

dove $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ è il completamento di $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ rispetto alla norma $\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x$. Consideriamo il caso

$$b(x,u) = K(x) u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

dove K è una funzione limitata. Allora (49) si trasforma in

$$-\Delta u = (1+\varepsilon K) u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{50}$$

Le soluzioni positive di (50) sono i punti critici su $E = D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ del funzionale

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^n} (u_+)^{2^*} - \frac{\varepsilon}{2^*}\int_{\mathbb{R}^n} K(u_+)^{2^*}.$$

Qui abbiamo usato la notazione consueta $(u_+) = \max\{u, 0\}$ e $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Il funzionale non perturbato corrispondente a $\varepsilon = 0$ possiede la varietà di punti critici

$$Z = \left\{ z_{\mu,\xi}(x) = \mu^{-\frac{n-2}{2}} z_0\left(\frac{x-\xi}{\mu}\right) : \mu > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n \right\} \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n.$$

La funzione z_0 è definita esplicitamente come

$$z_0(x) = \left(\frac{C_n}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

per qualche costante $C_n > 0$. Questa volta vogliamo dimostrare esplicitamente che Z è non degenere.

Lemma 5.1 $T_{z_{\mu,\xi}} Z = \ker D^2 f_0(z_{\mu,\xi})$.

Proof. Sappiamo che ci basta verificare l'inclusione $\ker D^2 f_0(z_{\mu,\xi}) \subset T_{z_{\mu,\xi}} Z$. Supponiamo che $u \in E$ sia una soluzione del problema linearizzato

$$-\Delta u = p z_{\mu,\xi}^{p-1} u. \tag{51}$$

Introduciamo le coordinate polari $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ e scriviamo u nella forma

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(r) Y_k(\theta)$$

dove

$$\psi_k(r) = \int_{S^{n-1}} u(r, \theta) Y_k(\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

e Y_k è la k-esima *armonica sferica* che verifica

$$-\Delta_{S^{n-1}} Y_k = k(n + k - 2) Y_k, \tag{52}$$

dove $\Delta_{S^{n-1}}$ è l'operatore di Laplace-Beltrami su S^{n-1}. Per $k \geq 0$ troviamo

$$\left(-\psi_k'' - \frac{n-1}{r} \psi_k' \right) Y_k - \frac{\psi_k}{r^2} \Delta_{S^{n-1}} Y_k = p z_{\mu,\xi}^{p-1} \psi_k,$$

e usando (52)

$$-\psi_k'' - \frac{n-1}{r} \psi_k' + \frac{k(n+k-2)}{r^2} \psi_k = p z_{\mu,\xi}^{p-1} \psi_k. \tag{53}$$

Senza ledere la generalità del discorso, supponiamo $\xi = 0$. Per $k = 0$ otteniamo l'equazione

$$-\psi_0'' - \frac{n-1}{r} \psi_0' = p z_{\mu,\xi}^{p-1} \psi_0. \tag{54}$$

La funzione

$$w(r) = \partial_\mu z_{\mu,0}(r) = \frac{n-2}{2} \left(\frac{\mu}{\mu^2 + r^2} \right)^{\frac{n-4}{2}} \frac{r^2 - \mu^2}{(\mu^2 + r^2)^2} \approx r^{-n+2}$$

per $r \to \infty$, e risolve (54). Faremo ora vedere che non può esserci una seconda soluzione, linearmente indipendente da w di (54), della forma $u(r) = c(r) w(r)$. Infatti, se tale soluzione esistesse, avremmo

$$-(c'' w + 2c' w' + c w'') - \frac{n-1}{r} (c' w + c w') = p z_{\mu,0}^{p-1} c w$$

e, siccome w è una soluzione di (54),

$$-c'' w - c' \left(2w' - \frac{n-1}{r} w \right) = 0.$$

Posto $v = c'$, avremmo

$$-\frac{v'}{v} = 2\frac{w'}{w} + \frac{n-1}{r}$$

e di coseguenza

$$c'(r)v(r) = \frac{1}{r^{n-1}w(r)^2} = O(r^{n-3}) \quad \text{per } r \to \infty.$$

Dunque $c(r) \approx r^{n-2}$ per $r \to \infty$, e in particolare

$$c(r)w(r) = O(1)$$

per $r \to \infty$. Quindi $cw \notin L^{p+1}$, e *a fortiori*, $cw \notin E$. Derivando l'equazione, è facile vedere che

$$z'_{\mu,0}(r) = \frac{n-2}{2}\left(\frac{\mu}{\mu^2+r^2}\right)^{\frac{n-4}{2}} \frac{-2r\mu}{(\mu^2+r^2)^2} \approx r^{-n+1}$$

per $r \to \infty$ è una soluzione di (53) per $k = 1$. Ragionando come sopra, si verifica che non c'e' una seconda soluzione linearmente indipendente. Per $k \geq 1$, consideriamo l'operatore

$$A_k\psi = -\psi'' - \frac{n-1}{r}\psi' + \frac{k(n+k-2)}{r^2}\psi - pz_{\mu,0}^{p-1}\psi.$$

Sappiamo che $A_1 z'_{\mu,0} = 0$, cioè che 0 è un autovalore di A_1 con una autofunzione che non si annulla mai. Allora $z'_{\mu,0}$ è un ground-state corrispondente all'autovalore principale $\lambda = 0$. Questo implica che A_1 è non-negativo.Se $k \geq 2$, scriviamo A_k nella forma

$$A_k\psi = A_1\psi + \frac{\delta_k}{r^2}\psi,$$

dove $\delta_k = k(n+k-2) - (n-1) > 0$ se $k \geq 2$. Allora A_k è un operatore positivo per $k \geq 2$ e dunque (53) per $k \geq 2$ non ha soluzioni trane quella identicamente nulla. Questo dimostra che u è della forma

$$\alpha\partial_\mu z_{\mu,0} + \nabla z_{\mu,0} \cdot \eta$$

per opportuni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. □

Grazie a questo lemma, possiamo effettuare la solita riduzione finito–dimensionale, riconducendoci allo studio della funzione di Poincaré–Melnikov

$$\begin{aligned}
\Gamma(\mu,\xi) &= \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^n} K(x) z_{\mu,\xi}(x)^{2^*}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\mu^{-\frac{n-2}{2}\frac{2n}{n-2}} z_0\left(\frac{x-\xi}{\mu}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^*}\mu^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x) z_0\left(\frac{x-\xi}{\mu}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^n} K(\mu y+\xi) z_0(x)^{2^*}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{55}$$

La varietà critica non soltanto non è compatta, ma è anche aperta. È chiaro che siamo interessati a capire quello che succede per $\mu \to 0$. Da (55) facendo tendere μ a zero, deduciamo

$$\lim_{\mu \to 0+} \Gamma(\mu, \xi) = \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^n} K(\xi) z_0(y)^{2^*} \, \mathrm{d}y = c_0 K(\xi).$$

Perciò Γ può essere prolungata per continuità a $\mu = 0$ ponendo

$$\Gamma(0, \xi) = c_0 K(\xi).$$

Calcoliamo la derivata di Γ rispetto a μ:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} = \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla K(\mu y + \xi) \mid y \rangle z_0(y)^{2^*} \, \mathrm{d}y,$$

sicché

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} = \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla K(\xi) \mid y \rangle z_0(y)^{2^*} \, \mathrm{d}y = 0.$$

Quindi anche questa derivata parziale può essere prolungata ponendo

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu}(0, \xi) = 0$$

e Γ può essere ulteriormente prolungata per simmetria a $\mathbb{R}^{n+1}$ come una funzione di classe C^1. Notiamo che

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}(0, \xi) = c_0 \nabla K(\xi).$$

In particolare

$$(0, \xi) \text{ è un punto critico di } \Gamma \text{ se e solo se } K''(\xi) = 0.$$

Tuttavia, si può dimostrare che i punti critici della forma $(0, \bar{\xi})$ non danno origine, generalmente, a soluzioni del nostro problema.

Lemma 5.2 *Sia $K \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ tale che*
(A) esiste $\rho > 0$ tale che $\langle \nabla K(x) \mid x \rangle < 0$ se $|x| > \rho$.
(B) $\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla K(x) \mid x \rangle \, \mathrm{d}x < 0$.
Allora

$$\langle \nabla \Gamma(\mu, \xi) \mid (\mu, \xi) \rangle < 0$$

per $|\mu| + |\xi| \gg 1$.

Proof. Poniamo $P = (\mu\xi)$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} 2^* \langle \Gamma(P) \mid P \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla K(\mu y + \xi) \mid \mu y + \xi \rangle z_0(y)^{2^*} \, \mathrm{d}y \\ &= \mu^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla K(x) \mid x \rangle z_0 \left(\frac{x - \xi}{\mu} \right)^{2^*} \, \mathrm{d}x \\ &= \mu^{-n} \left[J_{1,R} + J_{2,R} \right] \end{aligned}$$

dove

$$J_{1,R} = \int_{B_R} \langle \nabla K(x) \mid x \rangle z_0 \left(\frac{x-\xi}{\mu} \right)^{2^*} \mathrm{d}x$$

$$J_{2,R} = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \langle \nabla K(x) \mid x \rangle z_0 \left(\frac{x-\xi}{\mu} \right)^{2^*} \mathrm{d}x.$$

Qui R è un nuemro positivo che sceglieremo opportunamente. L'ipotesi (B) implica l'esistenza di un numero $R > 0$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla K(x) \mid x \rangle \, \mathrm{d}x < 0.$$

Poniamo $g(x) = \langle K(x) \mid x \rangle$, $g_+(x) = \max\{g(x), 0\}$, $g_-(x) = \max\{-g(x), 0\}$ e stimiamo $J_{1,R}$:

$$\begin{aligned} J_{1,R} &= \int_{B_R} g(x) z_0 \left(\frac{x-\xi}{\mu} \right)^{2^*} \mathrm{d}x \\ &= \int_{B_R} (g_+(x) - g_-(x)) z_0 \left(\frac{x-\xi}{\mu} \right)^{2^*} \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{B_R} (g_+(x) M_{\mu,\xi} - g_-(x) m_{\mu\xi}) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

dove

$$M_{\mu,\xi} = \max_{|x| \leq R} z_0 \left(\frac{x-\xi}{\mu} \right)^{2^*} \mathrm{d}x$$

$$m_{\mu,\xi} = \min_{|x| < R} z_0 \left(\frac{x-\xi}{\mu} \right)^{2^*} \mathrm{d}x.$$

È facile verificare che per $|\mu| + |\xi| \gg 1$ risulta

$$M_{\mu,\xi} \approx \frac{1}{\left(1 + \left| \frac{\bar{x}-\xi}{\mu} \right|^2 \right)^n}$$

con $\bar{x} = \frac{R\xi}{|\xi|}$. Quindi

$$M_{\mu,\xi} \approx \frac{1}{\left(1 + \left| \frac{R\xi}{|\xi|} - \xi \right|^2 \right)^n} \approx \frac{\mu^{2n}}{(\mu^2 + (R^2 - |\xi|^2)^n}$$

e analogamente

$$m_{\mu,\xi} \approx \frac{\mu^{2n}}{(\mu^2 + (R^2 + |\xi|^2)^n}.$$

Riassumendo, abbiamo

$$\lim_{|\mu|+|\xi|\to\infty} \frac{M_{\mu,\xi}}{m_{\mu,\xi}} = 1.$$

Inserendo questo risultato nella stima di $J_{1,R}$ troviamo infine

$$J_{1,R} \leq \int_{B_R} m_{\mu,\xi} \left(\frac{M_{\mu,\xi}}{m_{\mu,\xi}} g_+ - g_- \right) = m_{\mu,\xi} \int_{B_R} g(x)\,\mathrm{d}x + o(1) < 0$$

per $|\mu| + |\xi| \to \infty$. Per quanto riguarda $J_{2,R}$, l'ipotesi (A) garantisce che $J_{2,R} < 0$ per R abbastanza grande. La dimostrazione è completa. □

Corollary 5.3

$$\deg(\nabla\Gamma, B_R^{n+1}, 0) = (-1)^{n+1}.$$

Theorem 5.4 *Sia K una funzione di Morse tale che*

$$\Delta K(\xi) \neq 0 \quad \textit{per ogni punto critico } \xi \textit{ di } \Gamma.$$

Se

$$\sum (-1)^{m(\xi,K)} \neq (-1)^n, \tag{56}$$

dove la somma è estesa a tutti gli ξ tali che $\nabla K(\xi) =$ e $\Delta K(\xi) < 0$, allora per ε piccolo l'equazione (50) possiede una soluzione positiva.

Proof. Calcoliamo la matrice hessiana di Γ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \mu^2}(0,\xi) &= \frac{1}{2^*} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla K(\mu y + \xi) \mid y \rangle z_0(y)^{2^*}\,\mathrm{d}y \Big|_{\mu=0} \\
&= \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j} \partial_{ij}^2 K(\mu y + \xi) y_i y_j z_0(y)^{2^*}\,\mathrm{d}y \Big|_{\mu=0} \\
&= \frac{1}{2^*} \int +\mathbb{R}^n \sum_{i,j} \partial_{ij}^2 K(\xi) y_i y_j z_0(y)^{2^*}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2^*} \left[\int_{\mathbb{R}^n} y_1^2 z_0(y)^{2^*}\,\mathrm{d}y \right] \Delta K(y) = c_1 \Delta K(y)
\end{aligned}$$

dove $c_1 > 0$, e

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \mu \partial \xi}(0,\xi) = 0.$$

Perciò, per ogni $Q_\xi = (0,\xi)$ abbiamo

$$2^* \Gamma''(Q_\xi) = \begin{pmatrix} c_1 \Delta K(\xi) & 0 \\ 0 & K''(\xi) \end{pmatrix}.$$

Se $\Delta K(\xi) > 0$ allora l'indice di Morse di Q_ξ è $m(\Gamma, Q_\xi) = m(\xi, K)$. Altrimenti, se $\Delta K(\xi) < 0$ l'indice di Morse è $m(\Gamma, Q_\xi) = m(\xi, K) + 1$. Scriviamo l'identità di Eulero

$$(-1)^n = \sum_{\nabla K(\xi)=0} (-1)^{m(\xi,K)} = A^+ + A^- \tag{57}$$

dove

$$A^+ = \sum_{\substack{\nabla K(\xi)=0 \\ \Delta K(\xi)>0}} (-1)^{m(\xi,K)}$$

e

$$A^- = \sum_{\substack{\nabla K(\xi)=0 \\ \Delta K(\xi)<0}} (-1)^{m(\xi,K)}$$

Per assurdo, supponiamo che Γ non abbia punti critici all'infuori di Q_ξ, al variare di ξ nei punti critici di K. Allora Γ è una funzione di Morse, e

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1} &= \sum_{\nabla K(\xi)=0} (-1)^{m(Q_\xi,\Gamma)} \\ &= \sum_{\substack{\nabla K(\xi)=0 \\ \Delta K(\xi)>0}} (-1)^{m(\xi,K)} + \sum_{\substack{\nabla K(\xi)=0 \\ \Delta K(\xi)<0}} (-1)^{m(\xi,K)} \\ &= A^+ - A^-.\end{aligned} \tag{58}$$

Mettendo insieme (57) e (58) otteniamo infine

$$A^- = (-1)^n,$$

e ciò contraddice l'ipotesi (56) del teorema. $\square$

References

[AAG] A. Ambrosetti, D. Arcoya, J. L. Gámez, *Asymmetric bound states of differential equations in nonlinear optics*, Red. Sem. Mat. Univ. Padova, **100** (1998), 231–247.

[AB] A. Ambrosetti, M. Badiale, *Remarks on bifurcation from the essential spectrum*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, **35** (1999), 1–9.

[ABC] A. Ambrosetti, M. Badiale, S. Cingolani, *Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **140** (1997), 285–300.

[AGP1] A. Ambrosetti, J. Garcia Azorero, I. Peral, *Perturbation of* $\Delta u + u^{\frac{N+2}{N-2}} = 0$, *the scalar curvature problem in* $\mathbb{R}^N$ *and related topics*, J. Funct. Analysis, **165** (1999), 117–149.

[AGP2] A. Ambrosetti, J. Garcia Azorero, I. Peral, *Existence and multiplicity results for some nonlinear elliptic equations: a survey*, Rendiconti di Matematica, Serie VII, **20** (2000), 167–198.

[AMS] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, S. Secchi, *Multiplicity results for some nonlinear Schrödinger equations with potentials*, Arch. Rational Mech. Anal. **159** (2001) 253–271.

[Au] T. Aubin, *Équations différentielles non linéaires et problèmes de Yamabe concernat la courbure scalaire*, J. Math. Pures et Appl., **55** (1076), 269–296.

[BM] M. Berti, A. Malchiodi, *Multiplicity results and multibump solutions for the Yamabe problem on* S^n.

[CS] S. Cingolani, S. Secchi, *Semiclassical limit for nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields*, J. Math. Anal. Appl. **275** (2002) 108–130.

[FW] A. Floer, A. Weinstein, *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential*, J. Funct. Anal. **69** (1986), 397–408.

[MW] J. Mawhin, M. Willem. Critical point theory and Hamiltonian systems. Springer–Verlag. 1989.

[Oh] Y. G. Oh, *On positive multi-bump states on nonlinearSchrödinger equation under multiple well potentials*, Comm. Math. Phys. **131** (1990), 223–253.

[PS] A. Pomponio, S. Secchi, *On a class of singularly perturbed elliptic equations indivergence form: existence and multiplicity results*, preprint 2003.

[SS] S. Secchi, M. Squassina, *On the location of concentration points forsingularly perturbed elliptic equations*, preprint 2003.